

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
«Севастопольский государственный университет»

На правах рукописи

Рыжков Александр Игоревич

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОГО
ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТОВ С УПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ**

Специальность 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
доктор технических наук
профессор Бохонский А. И.

Севастополь – 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОБЪЕКТОВ С ЭЛЕМЕНТАМИ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ.....	12
1.1. Объекты с упругими элементами в современных автоматизированных производственных процессах	12
1.2. Колебательные процессы с участием манипуляторов со звеньями конечной жесткости.....	16
1.3. Методы синтеза целенаправленных движений объектов в технических системах	20
1.4. Сухое трение как аналог релейного управления.....	24
1.5. Постановка задач исследований	30
ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОГО ПЕРЕНОСНОГО ДВИЖЕНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ	32
2.1. Систематизация оптимальных ускорений (управлений) движением объектов как абсолютно твердых и деформируемых тел и систем.....	32
2.2. Перемещение упругого объекта с учетом линейно-вязкого сопротивления	41
2.3. Энергоемкость управлений перемещением объектов.....	44
2.4. Достаточные условия минимума восстановленного реверсионно функционала-критерия	48
2.5. Оценка энергетических затрат на реализацию целенаправленного движения	55
2.6. Обобщение алгоритма реверсионного конструирования целенаправленных движений.....	60
3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ (НА ПРИМЕРЕ 3D-ПРИНТЕРА).....	66
3.1. Реализация траекторий схвата манипулятора (печатающей головки)	67
3.2. Синтез управления линейным перемещением модуля с экструдером и рабочего стола	72
3.3. Реализация телескопическим манипулятором оптимального линейного перемещения печатающей головки.....	77
3.4. Ускорение манипулятора с упругой рукой	82

ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОГО ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОНСОЛЬНОГО ОБЪЕКТА КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ.....	89
4.1. Синтез оптимального управления вращением вокруг неподвижной оси объекта конечной жесткости.....	90
4.2. Определение частоты и периода собственных колебаний системы с распределенной массой	93
4.3. Проектирование упругого объекта для исследования оптимального переносного вращательного движения вокруг неподвижной оси	94
ГЛАВА 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА СИНТЕЗА ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОГО ВРАЩЕНИЯ ОБЪЕКТА КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ.....	100
5.1. Цель эксперимента и его актуальность	100
5.2. Экспериментальный стенд	101
5.3. Определение частот собственных колебаний консольного стержня	103
5.4. Конструирование синусоидального оптимального ускорения (разгон-торможение).....	104
5.5. Релейное оптимальное угловое ускорение при вращении стержня.	106
5.6. Организация и методика проведения эксперимента.	107
5.7. Результаты эксперимента, их анализ	110
5.8. Совершенствование алгоритмов конструирования ускорений упруго деформируемых объектов	113
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	118
УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ.....	120
СПИСОК ИСТОЧНИКОВ.....	121
ПРИЛОЖЕНИЕ А	135
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	136
ПРИЛОЖЕНИЕ В	137
ПРИЛОЖЕНИЕ Г	138
ПРИЛОЖЕНИЕ Д	139
ПРИЛОЖЕНИЕ Е.....	154

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Повышение производительности современной техники связано в том числе с реализацией быстрых поступательных и вращательных движений объектов с упругими элементами и, как следствие, появлением колебаний, влияющих на качество технических процессов. К объектам, участвующим в современном производстве, относятся, например, мехатронные модули, упругие подвесы, краны, манипуляторы минимальной массы (с упругими элементами), в космосе – разворачиваемые из транспортной укладки и участвующие в сборочных операциях крупногабаритные нежесткие конструкции.

Возникает необходимость моделирования таких целенаправленных движений реальных упругих систем (за приемлемое минимально возможное время), при которых без привлечения дополнительного источника энергии достижение конечного состояния сопровождается устранением колебаний.

В конструируемых программах движения приоритетно само достижение цели, и на заключительном этапе может быть оценено качество используемых средств (по восстановленному функционалу-критерию). В механике, например, при решении первой задачи динамики (ее называют обратной) по геометрическим свойствам движения находятся причины (силы), вызывающие это естественное движение.

Принципиальным отличием решения полной обратной задачи вариационного исчисления (в [1] названо реверсионным) является отсутствие предварительно задаваемого критерия оптимальности на начальном этапе реализации алгоритма. Синтез ускорения целенаправленного движения объекта предполагает по заданной аналитической функции перемещения либо ускорения получение уравнения Эйлера как первой вариации восстанавливаемого функционала-критерия.

Разработаны и исследованы модели целенаправленного движения систем с упругими элементами, в том числе – 3D-принтера для послойного синтеза деталей при формообразовании наплавлением (fused deposition modeling, FDM).

Степень разработанности темы исследования.

Теория колебаний механических систем развита в работах В.Л. Бидермана, Я.Г. Пановко, С.П. Тимошенко и других. Причинам возникновения колебаний, их пассивному и активному гашению посвящены работы В.А. Светлицкого, В.А. Троицкого, К.В. Фролова, Ф.Л. Черноусько. Управляемое движение объектов отражено в работах Л.Д. Акуленко, А.П. Батенко, В.Г. Болтянского, И.А. Карновского, Н.Н. Красовского, П.Д. Крутько, Н.Н. Моисеева, Л.С. Понтрягина.

До настоящего времени конструированию переносных поступательных и вращательных ускорений сложных деформируемых систем с устранением их колебаний в конце движения все ещё не уделялось должного внимания.

Экспериментальная проверка переносного поступательного движения упругого объекта выполнена М.М. Майстришиным с использованием оборудования учебного центра «СевНТУ-FESTO», СевГУ. Для практики необходима новая экспериментальная проверка применения известных и конструируемых ускорений переносным вращательным движением объектов с элементами конечной жесткости.

На основании аналитического обзора известных исследований сформулированы новые задачи конструирования кососимметричных переносных ускорений с приложением к манипуляторам с упругими звеньями, реализующими аддитивные технологические процессы. Исследование таких технических процессов отражено в работах Гусева Д.В., Довбыш В.М., Зайцева А.М., Зеленко М.А., Нагайцева М.В.

Цель исследований – моделирование целенаправленного переносного поступательного или вращательного движений объектов с упругими элементами с

использованием алгоритма решения полной обратной задачи вариационного исчисления (от функции перемещения – через уравнение Эйлера – к восстанавливаемому функционалу-критерию) при конструировании переносных ускорений, обеспечивающих достижение абсолютного либо относительного покоя объекта в конечном состоянии.

Задачи исследования:

1. Аналитический обзор методов моделирования динамики сложных движений объектов как абсолютно твердых тел и деформируемых систем.

2. Создание моделей целенаправленных поступательных и вращательных переносных движений объектов с элементами конечной жесткости с оценкой энергоемкости движений и приложением к исполнительным органам манипуляторов.

3. Экспериментальное исследование быстрого вращения консоли конечной жесткости (руки манипулятора) вокруг неподвижной оси при заданных угле и времени с достижением абсолютного покоя в конечном состоянии.

4. Анализ и приложение к аддитивным технологиям результатов моделирования динамики элементов 3D-принтеров с послойным наплавлением. Применение результатов исследований при изготовлении экранирующих электромагнитное излучение вентиляционных панелей электронных аппаратов.

Научная новизна:

1. Предложен новый метод конструирования и компьютерного моделирования целенаправленных переносных поступательных и вращательных ускорений упругих объектов и систем при перемещении на заданное расстояние или угол за время, определяемое из моментных соотношений в относительном движении (п. 1).

2. Созданы и исследованы алгоритмы реверсионного конструирования и оценки энергоемкости целенаправленных переносных ускорений типа «разгон – торможение» с использованием пакетов прикладных программ (п. 3).

3. Проведены аналитические и численные эксперименты для обоснования кососимметричных ускорений, обеспечивающих достижение цели движения (п.4). Анализ и обобщение результатов комплексных исследований привело к универсальным аналитическим зависимостям, описывающих динамику целенаправленного движения объектов техники (п.5).

4. Впервые выполнено экспериментальное исследование динамики быстрого вращения консольного элемента конечной жесткости (руки манипулятора) с целью достижения абсолютного покоя в конечном состоянии (п. 6).

Теоретическая и практическая значимость работы. На основании алгоритма решения полных обратных задач вариационного исчисления найдены новые типы ускорений (управлений) переносного поступательного и вращательного целенаправленного движения объектов с элементами конечной жесткости.

С учетом цели движения и свойств косо́й симметрии конструируемых ускорений, описываемых аналитическими функциями, восстанавливались уравнения Эйлера (как первых вариаций функционалов) и соответствующие им функционалы-критерии. Достаточность экстремума (минимума) функционалов подтверждалось построением графических образов, зависящих от параметра варьирования подходящих функций, близких к «скелетной кривой», являющейся решением уравнения Эйлера.

Впервые выполнена экспериментальная проверка вращения упругого объекта с использованием кососимметричной функции углового ускорения типа «разгон-торможение» с устранением колебаний в конечном положении.

Исследованы относительные колебания упругих объектов при целенаправленном переносном движении. Для реализации движения находилось приемлемое минимально возможное время (среди общих корней моментных соотношений – системы трансцендентных уравнений), обеспечивающее необходимый абсолютный либо относительный покой к концу движения.

Рассмотрены FDM 3D-принтеры как системы, реализующие преобразования потоков материалов, энергии и информации при изготовлении деталей; предложен подход к их классификации с учетом реализуемых вариантов целенаправленных движений, принятых к внедрению в производственный процесс ООО «Группа компаний «ЗАИН», г. Москва (патент РФ RU №2655118 от 06.06.2017).

Результаты экспериментов отражены в учебном пособии «Программное управление оборудованием» (Севастополь, 2020), рекомендованного Ученым советом Политехнического института СевГУ для студентов очной формы обучения специальностей 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств» и 15.03.06 «Мехатроника и робототехника».

Объект исследования. Конструирование управляемых движений упругих объектов техники.

Предмет исследования. Модели динамики целенаправленных переносных поступательных и вращательных движений объектов с элементами конечной жесткости с ускорениями, найденными в результате решения полных обратных задач вариационного исчисления.

Методология и методы исследования. При конструировании переносного ускорения объектов (в виде полиномов) применен алгоритм, включающий этапы: формулирование цели движения и ограничений; определение констант полиномов с учетом краевых условий и свойств кривой симметрии ускорений, факторизация полиномов; восстановление уравнения Эйлера как необходимого условия экстремума соответствующего функционала-критерия с последующей проверкой достаточных условий (Якоби, Вейерштрасса и Лежандра), подтверждающих существование экстремума (минимума).

С использованием близких к «скелетной кривой» подходящих функций, удовлетворяющих краевым условиям, получен математический образ функционала, зависящего от параметров варьируемой функции, подтверждающего существование экстремума (минимума).

Для анализа динамики элементов манипуляторов использовались аналитические и численные методы вычислительной математики, методы решения алгебраических и дифференциальных уравнений (с привлечением пакетов компьютерной алгебры MATLAB, Maple, MathCAD).

Личный вклад автора. В работах, опубликованных в соавторстве, обосновывается применение специальных кососимметричных ускорений, обеспечивающих перемещение за приемлемое минимально возможное время на заданное расстояние упругих объектов в состояние абсолютного либо относительного покоя (без дополнительных средств подавления колебаний). Необходимое время движения находится как один из общих корней системы трансцендентных уравнений (моментных соотношений). Соискатель непосредственно участвовал в решении задач по теме диссертации, подготовке статей и докладов на научных конференциях.

Впервые самостоятельно выполнена экспериментальная проверка вращения упругого объекта из исходного в конечное состояние абсолютного покоя. Оценены энергозатраты для изготовления деталей аддитивными технологиями при обеспечении требуемой точности и производительности.

Положения, выносимые на защиту:

1. Метод моделирования целенаправленных движений систем с элементами конечной жесткости и оценкой энергетических затрат.
2. Программы, отражающие аналитические и численные эксперименты при конструировании и исследовании динамики целенаправленных движений упругих объектов с достижением в конечном состоянии абсолютного либо относительного покоя.
3. Экспериментальное подтверждение корректности разработанного нового метода математического моделирования при быстром вращении упругого консольного объекта (руки манипулятора) с проверкой адекватности модели.

4. Модели поступательных и вращательных движений исполнительных органов при заданных траекториях в декартовой, полярной и сферической системах координат.

Степень достоверности и апробация результатов обоснована корректностью постановки задач с последующим математическим моделированием при параллельном использовании аналитических и численных методов вычислительной математики решения задач с применением пакетов прикладных программ. Достоверность результатов подтверждена аналитическими и численными экспериментами, непосредственной экспериментальной проверкой результатов и внедрением в производство.

Разделы диссертационной работы докладывались на: Всероссийской научно-технической молодежной конференции «Интеллектуальные системы, управление и мехатроника» (Севастополь, 2016г.); международной научно-технической конференции «Автоматизация и приборостроение: проблемы и решения» (Севастополь, 2016г., 2020г. и 2021г.); международной научно-практической конференции «Вопросы современной науки: проблемы, тенденции и перспективы» (Москва, 2016 г.); международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы науки XXI века» (Москва, 2016 г.); научно-практической конференции «Мехатроника, автоматика и робототехника» (Новокузнецк, 2017г.); «Динамика, надежность и долговечность механических и биомеханических систем» (г. Севастополь, 2017-2019 гг.), Всероссийской научно-практической конференции «Актуальные проблемы развития и эксплуатации ракетно-артиллерийского, специального вооружения и морской техники» (Севастополь, 2019-2021гг.); Международной научно-технической конференции «Машиностроение и техносфера XXI века» (Севастополь, 2020г.); международной конференции «International Conference on Artificial Intelligence & Information Systems 2021» (Китай, г. Чунцин, 2021 г.).

В полном объеме работа докладывалась на объединенных научных семинарах кафедр «Цифровое проектирование», «Технология машиностроения»,

«Приборные системы и автоматизация технологических процессов» (СевГУ, 2019-2022 гг.).

Реализован технологический процесс изготовления вентиляционных панелей путём FDM 3D-печати токопроводящим пластиковым филаментом в ООО «Группа Компаний «ЗАИН»; при сохранении качества детали затраты времени снизились с 12 ч до 7,5 ч.

Методология проведенного эксперимента и его результаты отражены в учебном пособии «Программное управление оборудованием» (Севастополь, 2020), рекомендованном для студентов очной формы обучения специальностей 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств» и 15.03.06 «Мехатроника и робототехника» Ученым советом Политехнического института СевГУ, протокол № 5 от 15.10.2020 г.

Публикации. Опубликовано 26 научных статей, из них 8 – в рецензируемых журналах из списка ВАК РФ, 3 – в иностранном журнале (входит в Scopus/Web of Science), 15 – в сборниках РИНЦ и материалах конференций; получен 1 патент РФ на изобретение и 1 свидетельство на государственную регистрацию программ для ЭВМ.

Структура и объем работы. Состоит из введения, пяти глав, выводов, списка использованных литературных источников, содержащего 126 наименований, и приложения, включающего: пример использования послойного синтеза изделия; акт внедрения результатов работы, акт о результатах экспериментальных исследований, комплекс программ расчета систем с элементами конечной жесткости. Диссертация содержит 89 рисунка и 10 таблиц. Общий объем работы – 172 страницы.

ГЛАВА 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОБЪЕКТОВ С ЭЛЕМЕНТАМИ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Развитие техники, а именно – электро-, пневмо-, гидроприводов и средств управления ими, привело к снижению участия живых существ из ряда областей, где использовалась в качестве приводящего усилия мышечная сила: перемещение в пространстве и осуществление воздействий исполнительными элементами. К средствам практической реализации можно отнести широкий класс устройств: манипуляторы (в горном деле, металлургии, ядерной и космической технике), порталные транспортеры, башенные краны, артиллерийские установки, электротранспорт, обрабатывающие центры, 3D-принтеры.

При реализации движений естественно требование к его качеству: обеспечение точности, быстродействия и отсутствия колебаний в конце движения.

1.1. Объекты с упругими элементами в современных автоматизированных производственных процессах

Манипуляторы [2] с элементами конечной жесткости (минимальной массы) имеют преимущества по сравнению с жесткими массивными аналогами. На их создание уходит меньше материала, они способны развивать большую рабочую скорость, требуют силовые приводы меньшей мощности, их легче транспортировать, они являются более безопасными в использовании, их стоимость меньше; отношение грузоподъемности манипулятора к его собственной массе выше по сравнению традиционно жесткими.

Реализация движений манипуляторами конечной жесткости для достижения требуемой точности и быстродействия при позиционировании продолжает оставаться одной из сложных технических задач.

Многозвенные манипуляторы конечной жесткости используются в качестве частей космических роботов [3, 4]. В земных условиях манипуляторы часто

используются в составе шлифовальных и покрасочных роботах, для распознавания образов посредством слабого прикосновения [4]. На АЭС манипуляторы используются для обслуживания парогенератора, очистки хранилища отходов и ряда других задач удаления загрязнений [5].

Нежесткие манипуляторы применяются для микрохирургических операций [5], например, в системе роботизированного позиционирования пациента во время лучевой терапии (Общеклиническая больница штата Массачусетс) [6].

Обеспечение точности позиционирования при уменьшении массы манипулятора – актуальная задача, связанная, в том числе, с возникновением колебательных процессов элементов исполнительных органов.

Основам общей теории колебаний линейных систем посвящена работа С.П. Тимошенко [7]. В работе В.Л. Бидермана [8] излагается теория колебаний линейных и нелинейных механических систем с приложениями к расчету объектов техники. Использование теории упругих колебаний, ее практическое применение в расчетах приведено в работах Я.Г. Пановко и И.М. Бабакова [9], [10]. Исследованию колебаний систем с конечным числом степеней свободы посвящен справочник [11]. В монографиях И.А. Карновского и А.И. Троицкого [12, 13] приведены результаты исследований активного (управляемого) подавления колебаний упругих систем. Задачи оптимизации колебательных процессов решены в работе В.Л. Черноусько, Н.Н. Болотника и В.Г. Градецкого [14].

В работе А.А. Воронова [15] показаны методы синтеза оптимальных систем управления с заданной структурой с использованием классического вариационного исчисления (метод множителей Лагранжа), решены задачи с закрепленными концами и фиксированным временем, задачи с подвижными концами.

В работах А.И. Бохонского, Н.И. Варминской, М.И. Мозолевого [1,3] излагаются результаты поиска оптимальных управлений переносным движением упруго деформируемых систем с приложением к манипуляторам конечной жесткости; с использованием предложенного алгоритма конструирования найдены ускорения, которые обеспечивают абсолютный либо относительный покой

упругих объектов в конце переносного движения. Результаты исследований иллюстрируются на примерах динамики упругих объектов с конечным числом степеней свободы с использованием одного типа сконструированных ускорений.

В работе А.И. Бохонского [16] показано, что при конструировании целенаправленных ускорений не исключается (по сравнению с известным примером оптимального управления) существенная экономия энергии для практической реализации движений. Конструирование оптимальных ускорений объектов как абсолютно твердых и деформируемых тел позволило сформулировать реверсионный принцип оптимальности (РПО), который предлагает, что аналитической кососимметричной функции переносного ускорения соответствует уравнение Эйлера для восстанавливаемого функционала-критерия. При этом время движения в случае упругих объектов находилось как один из общих корней системы трансцендентных уравнений, в которые превращаются моментные соотношения (в относительном движении). Таким образом, оптимальное переносное ускорение обеспечивало абсолютный покой упругого объекта в конечном состоянии.

По существу, алгоритм основан на решении полной обратной задачи вариационного исчисления – выполнение преобразований от исходной аналитической функции через уравнение Эйлера к восстанавливаемому функционалу-критерию. Если, например, исходная функция $x(t)$ является решением дифференциального уравнения $f(t, x, \dot{x}) = 0$, то, полагая это уравнение первой вариацией функционала, согласно уравнению Эйлера

$$\frac{d}{dx} F(\dot{x}, x) - \frac{d}{dt} \frac{dF(\dot{x}, x)}{d\dot{x}} = 0 \text{ восстанавливается функционал } \int_0^T F(\dot{x}, x) dt.$$

Следует отметить, что задача может не иметь единственного решения. Если, например, появляются два функционала, то возникает необходимость интерпретации образов таких функционалов.

В работе А.И. Бохонского [1] сформулирована теорема о численном равенстве определенных интегралов с различными подынтегральными функциями. В этом случае пределы интегрирования являются корнями уравнения для первообразных

$$\phi_1(t) - \phi_2(t) = 0.$$

В работе С.К. Дживеди и П. Эберхарда [5] приводится ряд подходов к моделированию динамики манипуляторов минимальной массы. Математические модели манипуляторов основаны на использовании принципа виртуальных перемещений, общего уравнения динамики, уравнения Лагранжа второго рода.

Также для описания деформируемого состояния конструкций манипуляторов используется метод конечных элементов (пакет ANSYS LS-DYNA): к 3D-моделям элементов манипуляторов применяются свойства материалов и законы, описывающие деформации манипуляторов (Plastic-elastic kinematic, к примеру). Помимо этого, используются модели с сосредоточенными параметрами.

Существует ряд подходов к управлению манипуляторами минимальной массы: адаптивное управление (система управления в зависимости от изменений параметров объекта или внешних возмущений изменяют параметры регулятора); самонастраивающееся управление (нелинейное адаптивное управление; запоминание информации заключается в изменении параметров системы, важных для целей системы); управление по открытому контуру (разомкнутая система); управление по замкнутому контуру (замкнутая система, ПИД-управление) [5].

Управление по открытому контуру для подавления колебаний предполагает контроль входа системы, учитывая вибрационные свойства системы с целью снижения уровня колебаний. При управлении по замкнутому контуру используются измерения и оценки состояний параметров системы, на основании которых формируется сигнал коррекции динамики.

Для управления одно- и двухзвенными манипуляторами используют ПД управления крутящим моментом привода [17], либо, например, используют «скользящее управление» (sliding control mode).

«Интеллектуальные» материалы на основе пьезоэлектриков применяются для управления процессами подавления колебаний, возникающих в манипуляторах при реализации различных форм движения. Покрытие из таких материалов может использоваться как аналоговый датчик для измерений характеристики деформации элементов конструкции [5].

Известны следующие управления: первое – реализует оптимальное переносное движение, а второе – управление напряжением, которое подается на пьезоэлектрическое покрытие для силового подавления колебаний.

В многозвенных манипуляторах применяются комбинированные управления. В работе Ш.Х. Лин, Д. Тосуноглу, Д.Тесар [18] исследована роль нелинейной обратной связи с ПИД-регулятором для стабилизации промышленного манипулятора конечной жесткости с 6 степенями свободы. В работе В.А. Уткина [19] предложено «скользящее» управление для многозвенного манипулятора конечной жесткости; использовано разделение движений для воссоздания вектора состояния при статической и динамической компенсации.

Синтез целенаправленных движений для их последующей реализации известными способами управления актуален для широкого класса технических систем, содержащих упругие (конечной жесткости) элементы. Реализация оптимальных движений сопряжена с трудностями в построении алгоритмов управления и их практической реализацией.

1.2. Колебательные процессы с участием манипуляторов со звеньями конечной жесткости.

Возникновение колебаний в манипуляторах конечной жесткости при быстром перемещении грузов приводит к уменьшению точности позиционирования и часто – к снижению производительности.

В процессе проектирования манипулятора на его структуру накладываются ограничения [3]: геометрические и технологические; по прочности, жесткости и устойчивости отдельных элементов конструкции манипулятора; по мощности управления; на число степеней свобод и звеньев. Выделены нетрадиционные ограничения: на перемещение центра масс схвата с грузом (обуславливаются приложением компенсирующих воздействий и весом груза), на частоту первой моды колебаний или на кратность частот. Приводятся примеры компенсаций при произвольном положении руки: поворот руки или её элемента; стабилизация центра масс при осуществлении управляемого деформирования (за счет дополнительного силового воздействия на конструкцию).

В работе [20] рассмотрено использование пьезоэлектрических материалов для управления однозвенным манипулятором, исследуется комбинированное управление сегментированными пьезоприводами (ЦТС приводами), содержащими цирконата-титаната свинца с учетом ПД обратной связи и управляющих напряжений. Это позволяет управлять движением и гасить колебания в звене манипулятора.

Предложены два типа реализации управлений: задание закона крутящего момента; управление напряжением пьезоэлектрических приводов.

Месторасположение и варианты компоновки пьезоэлектрических приводов определяет эффективность подавления вибраций [20]. Чрезмерное количество таких приводов ведет к увеличению массы всей конструкции манипулятора и поэтому обращается внимание на ограничение по массе манипулятора. Предложенные законы и способы управления подтверждены экспериментально.

В работе [21] описывается однозвенный манипулятор, в котором помимо пьезоэлектрических покрытий (активное подавление колебаний) используются вязкоупругие (пассивное подавление колебаний) материалы. Управление осуществлялось посредством адаптивного контроллера. Пьезоэлектрические слои могут быть использованы как приводы или как датчики.

Управление реализуется по эталонной модели. Входами являются управляющее напряжение электроприводом постоянного тока и напряжение,

приложенное к пьезоэлектрическим приводам. Измеряемые переменные: угол поворота манипулятора, измеряемый высокоточным потенциометром, генерирующим аналоговый сигнал (напряжение); колебания, измеряемые тензометрическим датчиком, формирующим выходное напряжение. Совместное воздействие управления пьезоэлементами и мотором эффективно снижает колебания.

Для построения системы использовался один контроллер. Возможно, применение другого адаптивного контроллера даст более близкий к измеренным параметрам колебаний результат.

В [20, 21] рассмотрено управление колебаниями манипулятора при использовании пьезоэлектрических покрытий, выполняющих роль приводов и датчиков. В [22] такие решения применяются для управления двухзвенным манипулятором.

При проектировании контроллера уравнения движения системы рассматривались быстрая и медленная подсистемы. Для медленной подсистемы использовалось управление переменной структуры. На Рисунке 1.1 и Рисунке 1.2 представлены результаты моделирования отклонения конца первого и второго звена манипулятора.

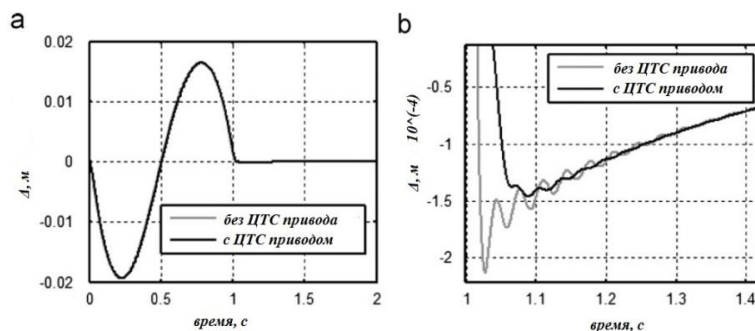


Рисунок 1.1 – Колебания конца первого звена

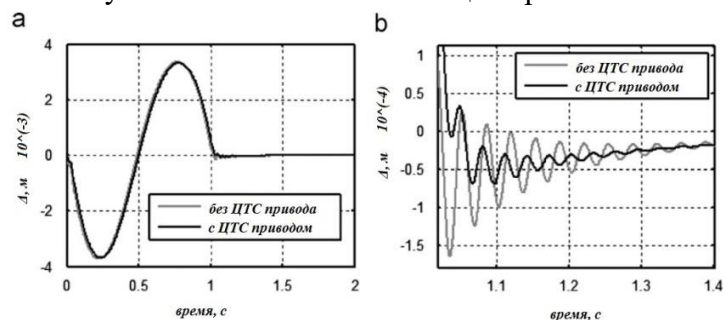


Рисунок 1.2 – Колебания конца второго звена

В модели контроллер медленной подсистемы обеспечил управление гибкой структурой, а ЦТС привода эффективно подавили колебания. Однако наблюдались расхождения результатов моделирования и испытаний [21].

В работах [20-22] манипуляторы совершали вращательное движение. В [23] манипулятор представляется в виде нежесткого консольного стержня длиной L с сосредоточенной массой m_t на его конце и кареткой массой m_b , совершающей линейное перемещение (Рисунок 1.3). ПД-контроллер реализует управление линейным движением всей системы. На расстоянии l_1 от основания расположено покрытие из пьезоэлектрика протяженностью $(l_2 - l_1)$, на которое подается управляющее напряжение.

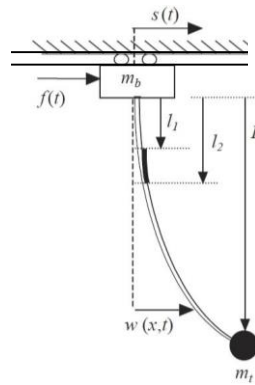


Рисунок 1.3 – Схема портального робота

Оценки скоростей элементов системы осуществлялись по трём сигналам: перемещение каретки $s(t)$, измеряемое лазерным датчиком; отклонение конца манипулятора $P(L,t)$, измеряемому вторым лазерным датчиком; напряжение в основании стержня $\varepsilon(0,t)$, измеряемое динамическим тензодатчиком. Осуществлялось численное моделирование с оценкой особенностей управления пьезоэлектрическим элементом. Результаты моделирования и эксперимента приведены на Рисунках 1.4-1.5.

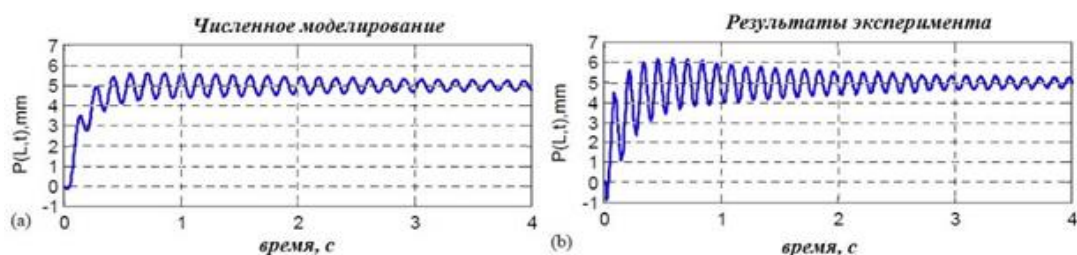


Рисунок 1.4 – Сравнение результатов численного моделирования и эксперимента без управления пьезоэлектрическим приводом

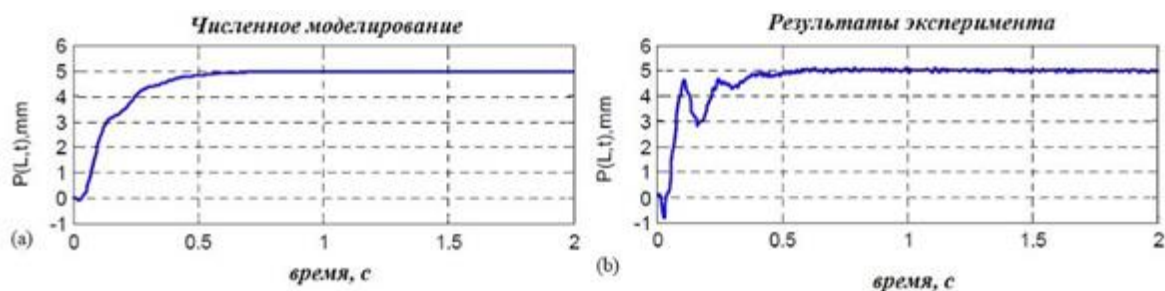


Рисунок 1.5 – Сравнение результатов численного моделирования и эксперимента при управлении пьезоэлектрическим приводом

Пьезоэлектрический привод подавляет колебания менее чем за 1 секунду, а без управляющего напряжения колебательные процессы длятся более 6 секунд. Применение пьезоэлектрических приводов оказалось эффективным и в случае с реализацией линейного перемещения объекта однозвенным манипулятором минимальной массы.

Естественно возникает задача осуществления такого целенаправленного движения системы, при котором в конечный момент времени позиционирования существенно снижаются колебания либо достигается относительный покой системы.

1.3. Методы синтеза целенаправленных движений объектов в технических системах

Решение задач поиска оптимального движения по известным алгоритмам осуществляется посредством выполнения ряда шагов [4], [24]: построение математической модели, формулирование цели (критерия качества, критерия оптимальности), синтез управляющих воздействий, использование ограничений на процесс.

При реализации программного управления возможны отклонения реальной траектории движения управляемого объекта от заданной оптимальной в связи с погрешностями математической модели, неконтролируемыми возмущениями.

Для синтеза оптимальных управлений движением объектов используется вариационное исчисление [25]. Известны решения задачи с закрепленными

концами и фиксированным временем, задачи с подвижными концами, с нефиксированным временем [26]. Функции, доставляющие экстремум функционалу, должны быть непрерывны (или кусочно-непрерывны) и дифференцируемыми. В прикладных задачах управления имеются ограничения в виде неравенств. Принцип максимума Понтрягина позволяет находить решения таких задач [26]. В отдельных случаях принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности управления [27]. Принцип нашел обоснование с позиций вариационного исчисления [1].

Поведение управляемой системы задается уравнениями в форме Коши:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \quad (1.1)$$

где x_i – фазовые координаты ($i = 1, \dots, n$); u_j – управления ($j = 1, \dots, m$). Необходимо найти такие управления u_j и траекторию x_i , которые доставляют экстремума функционалу вида

$$J = \int_0^T f_0(x, u, t) dt. \quad (1.2)$$

В этом случае функция Лагранжа

$$L = \psi_0 f_0 + \sum_{i=1}^n \psi_i (f_i - \dot{x}_i) = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i - \sum_{i=0}^n \psi_i \dot{x}_i = H - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i,$$

где функция Гамильтона $H = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i$. Уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала

(1.2) имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} - \frac{\partial L}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.3)$$

С учетом $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial H}{\partial x_i}$, $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \dot{\psi}_i$, $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} = 0$ получено:

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.4)$$

После подстановки $H = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i$ в (1.4) следуют сопряженные уравнения

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\psi_i \partial f_i(x, u, t)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.5)$$

Канонически сопряженные уравнения принимают вид:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.6) родственны известным каноническим уравнениям аналитической механики:

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad (j = 1, \dots, s), \quad (1.7)$$

где q_j, p_j – канонические переменные (обобщенные координаты и обобщенные импульсы для системы с s – степенями свободы).

Простой вид канонических уравнений Гамильтона имеет, например, неконсервативная система с одной степенью свободы, у которой «управляющим воздействием» является сила упругости. Обобщенная координата $q = x$, а обобщенная скорость $\dot{q} = \dot{x}$. Уравнение движения $\ddot{x} + x = 0$.

Функция Лагранжа $L = T - \Pi = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}x^2$. Обобщенный импульс $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}$.

Функция Гамильтона [28] $H = p \cdot \dot{q} - L = T + \Pi = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}$.

В этом случае канонические уравнения Гамильтона $\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$

принимают вид: $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $\frac{d\dot{x}}{dt} = -x$.

Отметим, что действие по Гамильтону $\int_0^T L dt$ в определенном смысле является

критерием оптимальности динамического поведения механической системы. После определения общего вида управления анализируется поведение системы [1].

Основой метода динамического программирования выступает принцип оптимальности Р. Бэллмана: каким бы ни было состояние системы, в котором она находится в результате некоторого числа шагов, на ближайшем шаге необходимо использовать такое управление, которое вместе с оптимальным управлением на последующих шагах приводит к оптимальному выигрышу. Использование данного принципа связано с решением нелинейных уравнений в частных производных.

Целевая функция Бэллмана $F(S) = \max \{W_n(S, x_n)\}$, где $W_n(S, x_n)$ – результат шага, S – состояние, x_n – управление на данном шаге, позволяет определить управление [29].

В работе [30] Н.Н. Красовского использован метод моментов при решении задач оптимального управления. Использование метода моментов для определения времени оптимального движения иллюстрируется на примере, описанном в [1]. Движение системы с одной степенью свободы без учета сопротивления описывается уравнением

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + k^2 q = -U_e(t), \quad (1.8)$$

где $k = \sqrt{\frac{2\pi}{T_1}}$ – частота собственных колебаний; T_1 – период собственных колебаний; $U_e(t)$ – управление движением. В начальном состоянии $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$. Решение уравнения (1.8):

$$q(t) = \frac{1}{k} \int_0^t U_e(\tau) \sin k(t-\tau) d\tau, \quad \dot{q}(t) = \int_0^t U_e(\tau) \cos k(t-\tau) d\tau. \quad (1.9)$$

Подавление колебаний в момент $t = T$ означает, что $q(T) = 0$, $\dot{q}(T) = 0$, т.е.

$$\int_0^T U_e(\tau) \sin k(t-\tau) d\tau = 0, \quad \int_0^T U_e(\tau) \cos k(t-\tau) d\tau = 0. \quad (1.10)$$

Из моментных соотношений (1.10) как системы трансцендентных уравнений при известном $U_e(t)$ находится время движения, т.е. $T_i = n_i T_1$, где i – номер корня.

Метод Ритца представляет собой решение задачи в вариационном исчислении, в основе которого лежит минимизация функционала на конечномерных функциональных пространствах. Значение некоторого функционала $J[y(x)]$ рассматривается на линейных комбинациях $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$ (α_i – постоянные коэффициенты), составленных из n первых функций некоторой выбранной последовательности $W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x)$ [25]. Поэтому функционал

$J[y(x)]$ становится функцией $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, которые выбираются из условия экстремума $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, т.е. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ должны быть определены из системы уравнений $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0$, где $i = 1, 2, \dots, n$.

1.4. Сухое трение как аналог релейного управления

Во многих технических системах, в том числе и 3D-принтерах, используются ременные (упругие) передачи, за счет которых реализуются линейные поступательные (и вращательные, если конструкция предполагает таковые) перемещения элементов, движения которых являются формообразующими. Ремень закрепляется на валах шаговых двигателей, управляемых драйверами, например, A4988. В данном случае для упругой системы с сухим трением проведена аналогия с оптимальным релейным управлением движением системы.

В 2013 г. опубликована статья Р.В. Гамкрелидзе «Открытие Принципа Максимума Понтрягина (ПМП)», отразившая содержание доклада автора на семинаре Тулонского университета (Франция) [31]. В монографиях [32,33], научной и учебной литературе [26,34] приведены примеры решения задач, иллюстрирующих применение принципа максимума.

Особенности использование принципа максимума иллюстрируются на примере системы с одной степенью свободы [34]. Для объекта с уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = u(t) \quad (1.11)$$

необходимо найти управление $|u(t)| \leq 1$, обеспечивающее перемещение за

минимальное время $I = \int_0^T dt = \min$ из исходного $(x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0)$ в конечное

состояние покоя $(x(T) = 0, \dot{x}(T) = 0)$. Уравнение (1.11) в форме Коши

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + u(t). \quad (1.12)$$

Для системы (1.12) Гамильтониан

$$H = \psi_0 \cdot 1 + \psi_1 x_2 - \psi_2 x_1 + \psi_2 u(t) \quad (1.13)$$

в случае

$$u(t) = 1 \cdot \text{sign } \psi_2(t) \quad (1.14)$$

достигает максимума. Из канонических уравнений

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \psi_2, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 \quad (1.15)$$

следует управление:

$$\psi_2 = D \cdot \sin(t + \alpha), \quad \text{т.е. } u(t) = 1 \cdot \text{sign}(\sin(t + \alpha)). \quad (1.16)$$

Константа α в (1.16) находится в результате дополнительного анализа поведения объекта (Рисунок 1.6) в управляемом движении.

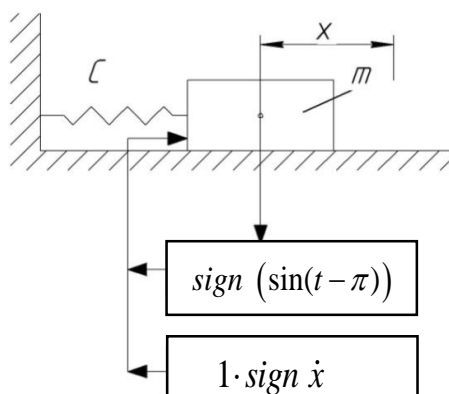
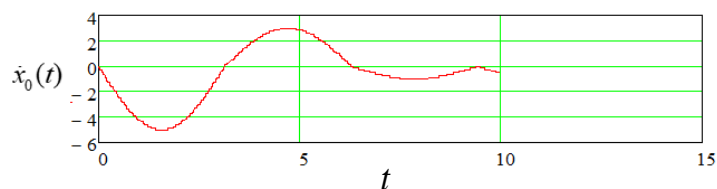
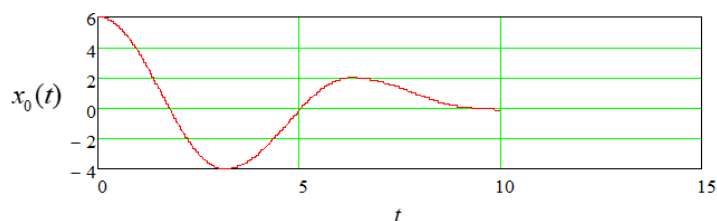


Рисунок 1.6 – Схема упругой системы с одной степенью свободы

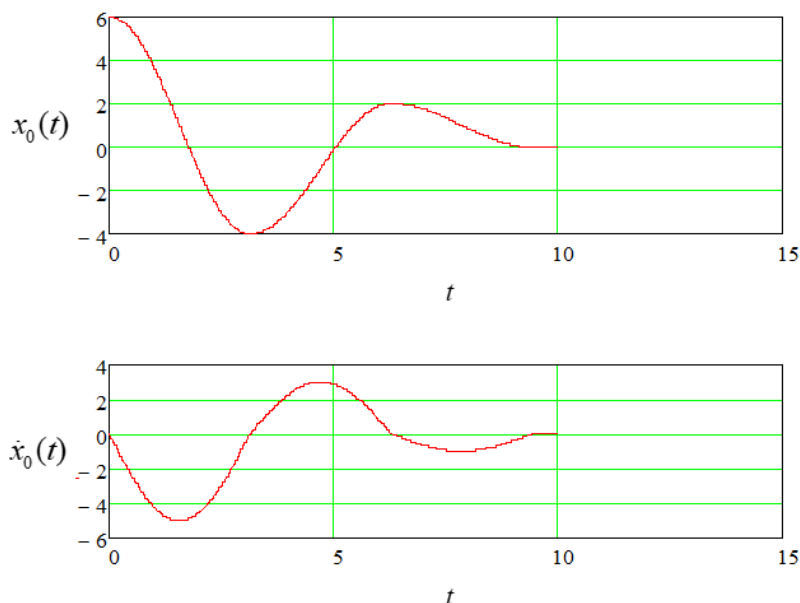
Численный эксперимент осуществлялся с использованием известных пакетов прикладных программ (MathCAD и Maple).

Пример 1. $x(0) = 6\text{ м}$, а $\dot{x}(0) = 0$. Управление $1 \cdot \text{sign}(\sin(t - \pi))$

$$x := \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_0 - \text{sign}(\sin(t - \pi)) \end{pmatrix} \quad Z := \text{rkfixed}(x, 0, 10, 2000, D)$$



$$x := \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_0 - \text{sign}(x_1) \end{pmatrix} \quad Z := \text{rkfixed}(x, 0, 10, 2000, D)$$



Из результатов численных экспериментов найдены характерные закономерности поведения системы с сухим трением.

При определении $\psi(0)$, как известно, используется трудоемкая итерационная процедура, сходимость которой зависит от выбора начальных приближений.

Выполнен анализ динамического поведения упругой системы при релейном оптимальном управлении, найденном с использованием ПМП, с аналогом управления с сухим трением, фактически выполняющим роль релейного управления.

Результаты получены при различных начальных условиях и соответствующих им управлениям. Ниже приведены примеры численного интегрирования уравнений движения с использованием релейных управлений, найденных согласно ПМП, и с использованием в качестве управления сухого трения.

Если $x(0) \neq 0$, а $\dot{x}(0) = 0$, то при $u(t) = 1 \cdot \text{sign}(\dot{x})$ и $u(t) = 1 \cdot \text{sign}(\sin(t - \pi))$ достигается покой ($x(T) = 0$, $\dot{x}(T) = 0$) за минимальное время. Если $x(0) = 0$, а

$\dot{x}(0) \neq 0$, то при $u(t) = 1 \cdot \text{sign}(\dot{x})$ и $u(t) = 1 \cdot \text{sign}(\sin(t - \pi))$ поведение системы одинаково, то покой наступает за одинаковое минимально возможное время.

Если же $x(0) \neq 0$, и $\dot{x}(0) \neq 0$, то для достижения состояния покоя применима алгебраическая сумма управлений, т.е. $u(t) = 1 \cdot \text{sign}(\cos(t - \pi)) - 1 \cdot \text{sign}(\sin(t - \pi))$. Если в этом случае принять только $u(t) = D \cdot \text{sign}(\dot{x})$, то для приведения системы в состояние покоя за минимальное время необходимо чтобы $D > 1$.

Для уменьшения времени достижения конечного состояния покоя во всех случаях необходимо увеличивать $|D|$. При достижении цели движения (покоя) релейное управление отключается.

Вид функции $\psi_2(t)$ зависит от начальных условий. В данном примере $\psi_2(0) = 0$, $\frac{d\psi_2}{dt}(0) = 1$. Применение ПМП позволяет сузить класс управлений (ускорений) для достижения цели движения при заданных начальных условиях.

График, изображённый на Рисунке 1.7, получен экспериментально при варьировании $|D|$.

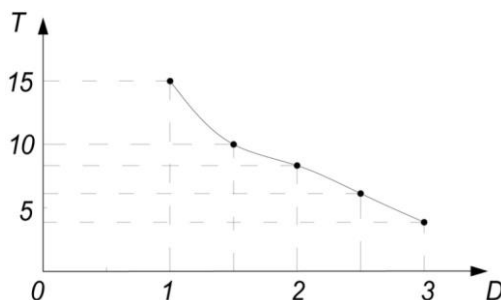


Рисунок 1.7 – График зависимости времени движения до остановки ($x(T) \approx 0$, $\dot{x}(T) \approx 0$) от предельного по абсолютной величине значения релейного управления $|D|$

С ростом D время достижения состояния покоя уменьшается экспоненциально. Экспериментально представляется возможность найти физически реализуемое минимально возможное время движения для достижения состояния покоя ($x(T) = 0$, $\dot{x}(T) = 0$).

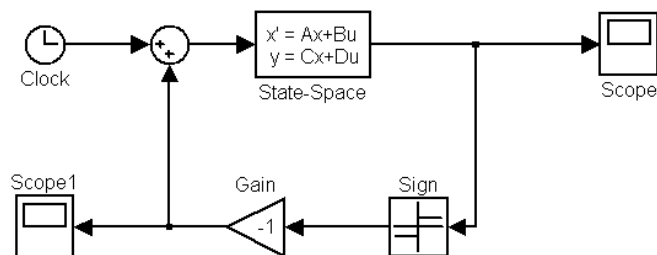


Рисунок 1.8 – Схема SIMULINK–модели объекта с обратной связью

На Рисунке 1.8 изображена схема (в Simulink) для реализации управления $u(t) = 1 \cdot \text{sign}(\dot{x})$ в виде обратной связи. Дополнительно экспериментально подтверждено аналогичное поведение системы при выполненных ранее экспериментах в Mathcad.

Схема упругой системы с двумя системами свободы изображена на Рисунке 1.9. Управления движения системы:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (C_1 + C_2)x_1 - C_2 x_2 = U_2(t), \quad (1.17)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + C_2 x_2 - C_2 x_1 = U_2(t),$$

где $U_1 = -f_1 \text{sign} \dot{x}_1$, $U_2 = -f_2 \text{sign} \dot{x}_2$. Для численного интегрирования в Mathcad использованы переменные: x_0, x_1, x_2, x_3 .

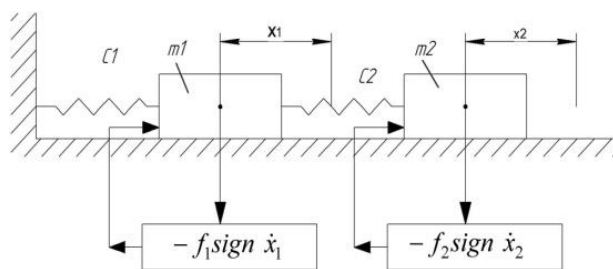


Рисунок 1.9 – Схема системы с двумя степенями свободы.

с релейным управлением колебаниями, аналогичном сухому трению (по Кулону-Амантону)

Система уравнений (1.17) в новых переменных преобразуется к виду:

$$\frac{dx_0}{dt} = x_1, \quad \frac{dx_1}{dt} = -\frac{(C_1 + C_2)}{m_1} \cdot x_0 + \frac{C_2}{m_1} x_2 - f_1^* \text{sign}(x_1), \quad f_1^* = f_1 / m_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = +\frac{C_2}{m_2} \cdot x_0 - \frac{C_2}{m_2} x_2 - f_2^* \text{sign}(x_3), \quad f_2^* = f_2 / m_2. \quad (1.18)$$

При использовании процедуры *rkfixed* для выдачи результатов на печать приняты новые обозначения: $z^{<0>} = t$, $z^{<1>} = x_0$, $z^{<2>} = \dot{x}_0$, $z^{<3>} = x_2$, $z^{<4>} = \dot{x}_2$.

Пример 2. Система с двумя степенями свободы.

$$m1 := 40$$

$$m2 := 10$$

$$C1 := 2000$$

$$C2 := 1000$$

$$x := \begin{pmatrix} 0.04 \\ 1 \\ 0.04 \\ 1 \end{pmatrix}$$

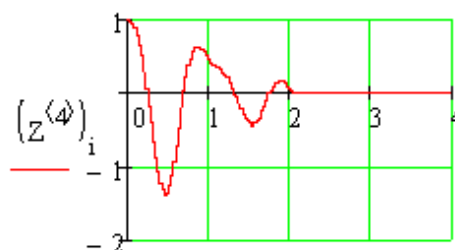
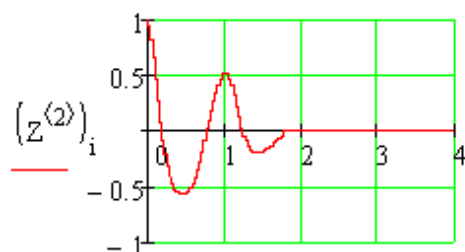
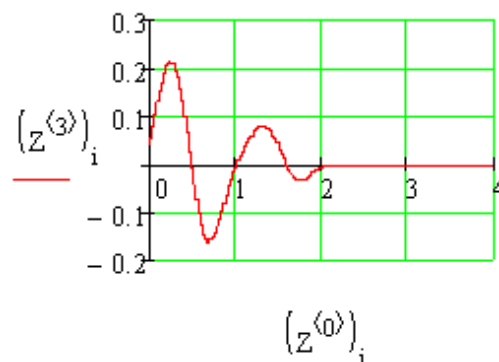
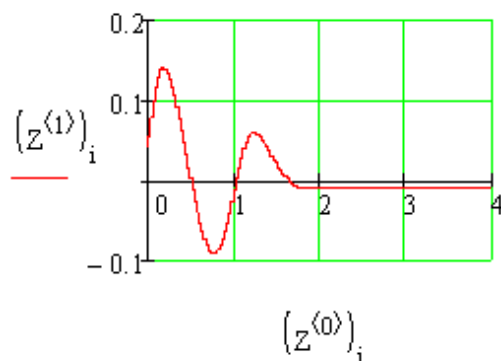
$$f1 := 0.85$$

$$f2 := 0.85$$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ -(C1 + C2) \cdot \frac{x_0}{m1} + C2 \cdot \frac{x_2}{m1} - f1 \cdot \text{signum}(x_1) \\ x_3 \\ C2 \cdot \frac{x_0}{m2} - C2 \cdot \frac{x_2}{m2} - f2 \cdot \text{signum}(x_3) \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{rkfixed}(x, 0, 4, 10000, D)$$

$$i := 0 \dots \text{rows}(Z) - 1$$



Исходные данные: $m_1 = 40$ кг; $m_2 = 10$ кг; $C_1 = 2000$ Н/м; $C_2 = 1000$ Н/м. Частоты собственных колебаний: $\omega_1 = 5,997$ с⁻¹; $\omega_2 = 11,792$ с⁻¹. В численном эксперименте

варьировались начальные условия и сопротивления $|f_1|$, $|f_2|$.

Пример 1. При $x_1(0) = x_2(0) = 0,04$ м, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ м/с и $|f_1| = |f_2| = 0,2$ Н система приводится в состояние покоя за 2 с.

Пример 2. При $x_1(0) = x_2(0) = 0,04$ м, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 1$ м/с и $|f_1| = |f_2| = 0,85$ Н система также приводится в состояние покоя за 2 с.

Пример 3. При за $x_1(0) = 0,04$ м, $x_2(0) = -0,04$ м, $\dot{x}_1(0) = -1$ м/с, $\dot{x}_2(0) = 1$ м/с, $|f_1| = 0,2$ Н, $|f_2| = 1,2$ Н система приводится в состоянии покоя за 2 с.

Показано, что в рассмотренных задачах релейному управлению (ускорению), найденному для упругой системы с одной степенью свободы с использованием ПМП, аналогом является сухое трение. При этом исключена процедура поиска начальных значений $\psi(0)$. Приближения в виде многократного численного интегрирования исходной системы нелинейных уравнений с сухим трением позволяют с достаточной для практики точностью найти требуемые управления для достижения цели движения.

При оптимальном по быстрдействию перемещении упругой системы общее время движения может быть найдено из моментных соотношений [3], а затем уточнено в результате простого численного эксперимента.

Пример поведения системы с двумя степенями свободы при целенаправленном движении иллюстрирует приведение системы за требуемое минимальное время в состоянии покоя. Рассмотренный подход, основанный на поиске управлений в результате последовательных приближений, распространяется на системы с конечным числом степеней свободы [35,36].

1.5. Постановка задач исследований

Определено основное направление исследования – моделирование динамики целенаправленного переносного движения объектов с элементами конечной жесткости при конструировании перемещений или ускорений с использованием алгоритма решения полной обратной задачи вариационного

исчисления с целью достижения абсолютного либо относительного покоя объекта в конечном состоянии.

Задачи исследования:

1. Аналитический обзор методов моделирования динамики сложных движений объектов как абсолютно твердых тел и деформируемых систем.
2. Создание моделей целенаправленных поступательных и вращательных переносных движений объектов с элементами конечной жесткости с оценкой энергоемкости движений и приложением к исполнительным органам манипуляторов.
3. Экспериментальное исследование быстрого вращения консоли конечной жесткости (руки манипулятора) вокруг неподвижной оси при заданных угле и времени с достижением абсолютного покоя в конечном состоянии.
4. Анализ и приложение к аддитивным технологиям результатов моделирования динамики элементов 3D-принтеров с послойным наплавлением. Применение результатов исследований при изготовлении экранирующих электромагнитное излучение вентиляционных панелей электронных аппаратов.

ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОГО ПЕРЕНОСНОГО ДВИЖЕНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

Синтез оптимальных целенаправленных движений манипуляторов минимальной массы (с элементами конечной жесткости), реализующих технологические операции, например, в промышленности, в аддитивном производстве, в медицине и в космосе – продолжают оставаться актуальной задачей. В процессе реализации перемещений такими устройствами возникают колебания элементов исполнительных органов конечной жесткости, влияющие на качество технологического процесса. Появляется необходимость поиска таких ускорений (управлений), которые удовлетворяли бы возрастающим требованиям точности и быстродействия реальных упругих систем при снижении энергозатрат на реализацию движений.

2.1. Систематизация оптимальных ускорений (управлений) движением объектов как абсолютно твердых и деформируемых тел и систем

В работах Л.С. Понтрягина, В.Г. Болтянского, Р.В. Гамкрелидзе, В.В. Солодовникова, А.В. Нетушила, Н.Д. Абдуллаева, Ю.П. Петрова, Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко [32, 34, 37-39] приведены классические методы теории оптимального управления, дан ряд примеров синтеза оптимальных ускорений (управлений) и конструирования систем управления с оптимальными регуляторами. В работе Р. Дорфа, и Р. Бишопа [40] приведены решения актуальных задач оптимального управления объектами современной техники с использованием Matlab и Simulink.

Практические задачи оптимального управления не исключают нахождения решения актуальных задач альтернативными методами. Для достижения цели движения управления могут быть сконструированы в результате анализа предполагаемого динамического поведения объекта с учетом его свойств и технологических ограничений. Например, известно решение практических задач

путем конструирования целенаправленного движения объекта [3, 41, 42]. Для подтверждения оптимальности таких управлений использовалась процедура восстановления функционалов по аналитическим функциям (решение полных обратных задач вариационного исчисления – от функции через уравнение Эйлера к функционалу-критерию).

Рассматривается объект, участвующий в двух движениях: переносном и относительном; упругие колебания в относительном движении вызваны быстрым переносным движением. Представляет также интерес исследование динамического поведения упругого объекта при сложном движении.

Рассмотрим наиболее простой пример восстановления функционала. Пусть задана функция $x(t) = Ce^{-kt}$, являющаяся решением уравнения $\ddot{x} + k\dot{x} = 0$; тогда для этого уравнения существует функционал $J = \int_0^T [\dot{x}^2 e^{kt} / 2] dt$, позволяющий оценить диссипацию энергии при линейно-вязком сопротивлении.

В работах А.И. Бохонского и Н.И. Варминской [3, 41, 42] решение полной обратной задачи вариационного исчисления, когда по аналитической функции восстанавливается не только дифференциальное уравнение, но и функционал, названо реверсионным исчислением. Алгоритмы восстановления функционалов проиллюстрированы на характерных примерах. Итак, конструируемое движение, создаваемое в соответствии с условиями достижения цели движения с учетом предполагаемых свойств управления (например, косой симметрии), оптимально в смысле существования восстановленного функционала-критерия, принимающего в истинном движении стационарное значение (минимум). При таком подходе к решению задач управления интересен поиск функционала, если, конечно, он существует.

Итак, необходимо принять такое переносное ускорение (управление) объекта, при котором достигается цель движения и выполняются заданные ограничения.

Известно решение вариационным методом достаточно простой задачи оптимального управления движением объекта как абсолютно твердого тела,

приведенное, например, в [34]. Управляемое движение единичной массы (без учета сопротивления) описывается уравнением

$$\frac{d^2 S_e^*}{dt^2} = U_e^*(t), \quad (2.1)$$

где $U_e^*(t)$ – ускорение (управление). Для квадратичного критерия оптимальности $J = \int_0^T (U_e^*)^2(t) dt$ с учетом краевых условий $S_e^*(0) = 0$, $\dot{S}_e^*(0) = 0$; $S_e^*(T) = L$, $\dot{S}_e^*(T) = 0$, где

T – общее время движения, как известно, решение имеет вид:

$$U_e^*(t) = \frac{6L}{T^3}(T - 2t), \quad V_e^*(t) = \frac{6Lt}{T^3}(T - t), \quad S_e^*(t) = \frac{Lt^2}{T^3}(3T - 2t),$$

где L – перемещение объекта за время T . Критерий J не является в обычном смысле энергетическим, но использование строгих энергетических критериев приводит к нелинейным уравнениям Эйлера четвертого порядка, которые не имеют точного решения [3]. Эта простая задача может быть решена и без заранее заданного критерия.

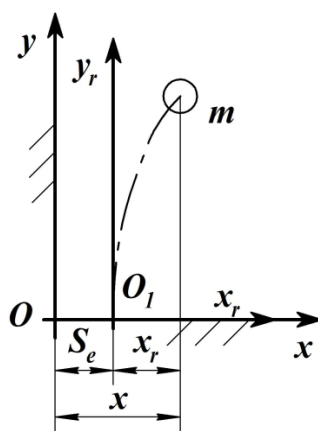


Рисунок 2.1 – Схема переносного, относительного и абсолютного движения осциллятора

Согласно Рисунку 2.1, для абсолютного движения упругого осциллятора справедливо уравнение

$$\ddot{x} + k^2 x = k^2 S_e(t), \quad (2.2)$$

где x – перемещение сосредоточенной массы в абсолютном движении в неподвижной системе координат xOy ; $S_e(t)$ – закон переносного движения. В относительном движении (по отношению к движущейся поступательно системе

координат $x_r O_{1y_r}$) уравнение движения упругого объекта (осциллятора) без учета сопротивления

$$\ddot{x}_r + k^2 x_r = -U_e(t), \quad (2.3)$$

где x_r – относительное перемещение; $U_e(t)$ – переносное ускорение.

С учетом $x(t) = S_e(t) + x_r(t)$ или $\ddot{x}(t) = \ddot{S}_e(t) + \ddot{x}_r(t)$, вычитая из (2.2) уравнение (2.3), получим уравнение, описывающее только переносное движение:

$$\ddot{S}_e^*(t) = U_e^*(t). \quad (2.4)$$

На следующем примере дальше иллюстрируется процедура конструирования нового оптимального управления переносным движением объекта. Пусть ускорение (управление) имеет вид полинома $U_e(t) = \sum_{i=1}^6 C_i t^{i-1}$, где $C_i = const, i=1, 2, \dots, 4$. Для определения констант заданы краевые условия и условия косо́й симметрии ускорения (управления)

$$S_e(0) = 0, \quad \dot{S}_e(0) = 0, \quad S_e(T) = L, \quad \dot{S}_e(T) = 0;$$

$$\int_0^{T/2} U_e(t) dt + \int_{T/2}^T U_e(t) dt = 0, \quad \dot{U}_e(T/2) = 0.$$

Параметр a определен в результате двукратного интегрирования уравнения (2.4) с учетом краевых условий: $S_e(0) = 0, \quad \dot{S}_e(0) = V_e(0) = 0, \quad S_e(T) = L$. После преобразований, получены выражения для управления (ускорения), скорости и перемещения:

$$U_e(t) = \frac{10L}{T^5} (T - 2t)^3, \quad V_e(t) = at - \frac{3at^2}{T} + \frac{4at^3}{T^2} - \frac{2at^4}{T^3},$$

$$S_e(t) = \frac{at^2}{2} - \frac{at^3}{T} + \frac{at^4}{T^2} - \frac{2at^5}{5T^3},$$

где $a = 10L/T^2$. Функция $U_e(t)$ является решением уравнения Эйлера $\frac{d^4 U_e(t)}{dt^4} = 0$,

для которого функционал $J_2 = \int_0^T [\dot{U}_e(t)]^2 dt$ в данном случае выступает как

критерий оптимальности. На Рисунке 2.2 приведены графики переносного движения для двух критериев оптимальности.

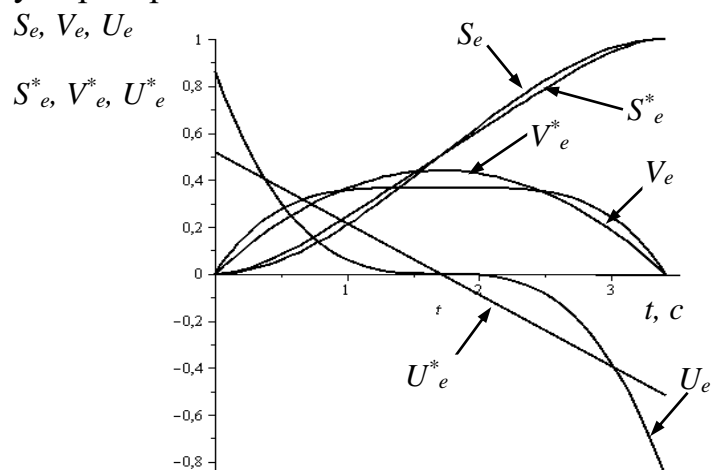


Рисунок 2.2 – Графики переносного движения объекта для критериев:

$$J_1 = \int_0^T (U_e^*)^2(t) dt, \quad J_2 = \int_0^T [\dot{U}_e(t)]^2 dt.$$

При оценке достаточности минимума функционала J_2 вместо допустимых (и удовлетворяющих краевым условиям) функций $S_e(t)$ в анализе дальше использованы ускорения $U_e(t)$, которые близки к «скелетной кривой» $U_e(t)$ и взяты в малой окрестности ε_1 :

$$|U_e(t) - U_e^\times(t)| \leq \varepsilon_1, \quad \frac{d}{dt}(U_e(t) - U_e^\times(b,t)) = 0,$$

где $b = const$. При этом $\frac{d^2}{dt^2}(U_e(t) - U_e^\times(t)) < 0$.

В качестве «скелетной кривой», с которой сравнивались варьируемые функции, принята функция $U_e(t) = \frac{a}{T^3}(T - 2t)^3$, являющаяся решением уравнения

Эйлера $\frac{d^4 U_e(t)}{dt^4} = 0$, где $a = 10L/T^2$. Графики $U_e(t)$ и $U_e^\times(t)$ изображены на Рисунке

2.4. Значения параметра δ варьирования функций находились как определенный интеграл от разности функций:

$$\delta_i = \int_0^T [S_e(t) - S_e^\times(t)] dt.$$

Каждой $U_e^\times(t)$ соответствует функция $S_e^\times(t)$. Значения функционала вычислялись по формуле $J(\delta_i) = \int_0^T [\dot{U}_e(t)]^2 dt$.

Результаты вычислений сведены в таблицу 2.1.

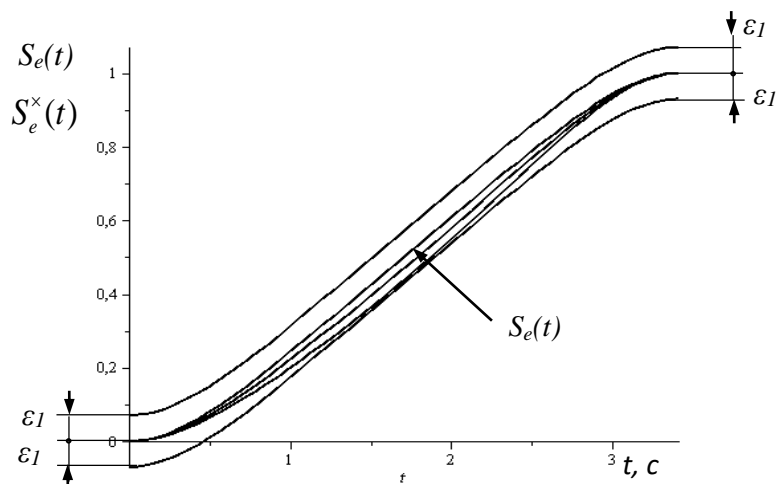


Рисунок 2.3 – «Скелетная кривая» $S_e(t)$ и варьируемые кривые в окрестности ϵl

Таблица 2.1 – Значения варьируемого параметра δ_i и функционала $J_i(\delta_i)$

δ_i	-0,1137	-0,0568	0	0,0560	0,1137
$J_i(\delta_i)$	3,689	3,604	3,5811	3,608	3,689

Полученная таблично функция $J_i(\delta_i)$ аппроксимирована по способу наименьших квадратов аналитической зависимостью

$$J(\delta) = b\delta^2 + c\delta^4 + J_0, \quad (2.5)$$

где $J_0 = 3,5811$; $b = 8,3152$; $c = -0,000016$.

Как и следовало ожидать, минимум достигается при $\delta=0$. Функция (2.5) изображена на Рисунке 2.5.

Совмещенные графики движения для двух типов управлений (при $L=1\text{м}$) изображены на Рисунке 2.2. При таких управлениях (ускорениях) перемещения близки. В Таблице 2.2 приведены результаты вычислений энергетических характеристик найденных управлений.

Отметим, что в данном примере энергетические затраты для достижения цели движения в случае критерия оптимальности J_2 (по сравнению с использованием критерия J_1) уменьшаются примерно на 30 % .

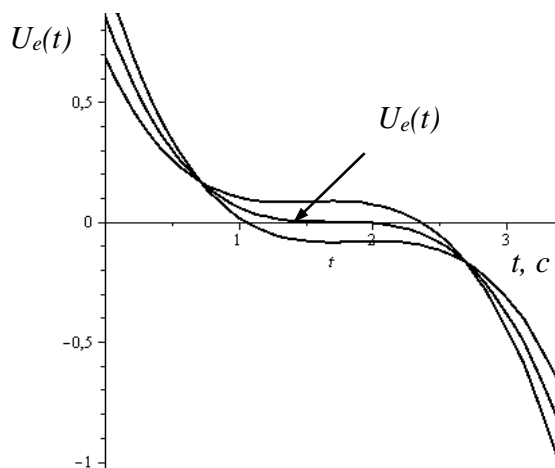


Рисунок 2.4 – «Скелетная кривая» $U_e(t)$ и варьируемые в ее окрестности кривые

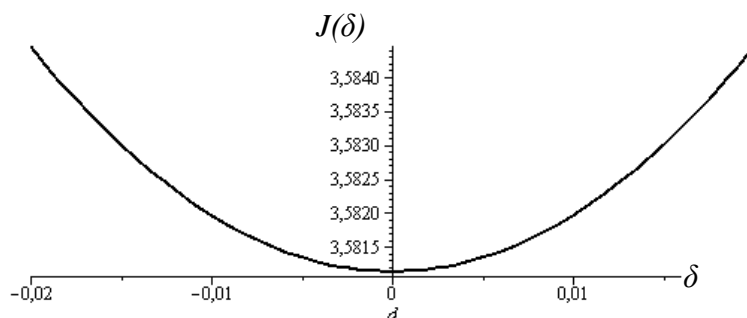


Рисунок 2.5 – Зависимость реверсионно восстановленного функционала $J(\delta)$ от параметра δ вариаций функций

Таблица 2.2 – Энергетические характеристики управлений

№	Типы критериев	1-й тип управления с критерием $J_1 = \int_0^T U_e^2(t) dt$	2-й тип управления с критерием $J_2 = \int_0^T [\dot{U}_e(t)]^2 dt$
1	$A = 2 \int_0^{T/2} (U_e(t) V_e(t)) dt$	0,1935	0,1343
2	$ N = \int_0^T U_e^2(t) dt$	0,3026	0,3607
3	$I_V = \int_0^{T/2} V_e^2(t) dt$	0,4322	0,3666

Исследовано переносное движение упругого объекта с одной степенью свободы. Если объект при его быстром перемещении деформируется, то на практике часто необходимо устранить его колебания к концу движения. Без учета сопротивления дифференциальное уравнение относительного движения (по отношению к осям, движущимся поступательно вместе с упругим объектом) имеет вид: $\frac{d^2 x_r}{dt^2} + k^2 x_r = -U_e(t)$, где k – частота собственных колебаний упругого объекта.

Как установлено в [41-42], общее время движения находится из моментных соотношений, которые означают равенство нулю перемещения и скорости в относительном движении в момент времени $t = T$ ($x_r(T) = 0$, $\dot{x}_r(T) = 0$).

В случае первого типа управления $U_e^*(t) = \frac{6L}{T^3}(T - 2t)$ при $T/T_1 = n$, $T_1 = 2\pi/k$, где T_1 – период собственных колебаний упругой системы, моментные соотношения

$$x_r(T) = -\frac{6L}{k^3 T^3} (2 \sin(kT) - \cos(kT) \cdot kT + kT - 2kT) = 0,$$

$$\dot{x}_r(T) = -\frac{6L}{k^2 T^3} (2 \cos(kT) + \sin(kT) \cdot kT - 2) = 0$$

после преобразований принимают вид:

$$\sin(2\pi n) - \cos(2\pi n)\pi n - \pi n = 0, \quad \cos(2\pi n) + \sin(2\pi n)\pi n - 1 = 0. \quad (2.6)$$

Для второго типа управления (ускорения) $U_e(t) = \frac{10L}{T^5}(T - 2t)^3$ моментные соотношения следующие:

$$\begin{aligned} 3 \sin(2\pi n)\pi^2 n^2 - 6 \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n)\pi^3 n^3 + 6 \cos(2\pi n)\pi n - \pi^3 n^3 + 6\pi n &= 0, \\ 3 \cos(2\pi n)\pi^2 n^2 - 6 \cos(2\pi n) + \sin(2\pi n)\pi^3 n^3 - 6 \sin(2\pi n)\pi n - 3\pi^2 n^2 + 6 &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Моментные соотношения (2.6) и (2.7) имеют соответственно свои общие корни. Если для первого случая управления (при $T_1=1$ с) время движения $T=3,47$ с, то для второго управления (как и ранее $T_1 = 1$ с) время движения $T = 3,41$ с.

Графики колебаний упругого объекта ($x_r(t)$, $\dot{x}_r(t)$) в интервале движения ($T \geq t \geq 0$ для первого управления) изображены на Рисунке 2.6. В конце движения наступает абсолютный покой ($\dot{S}_e(T)=0$, $S_e(T) = L$; $x_r(T)=0$, $\dot{x}_r(T)=0$).

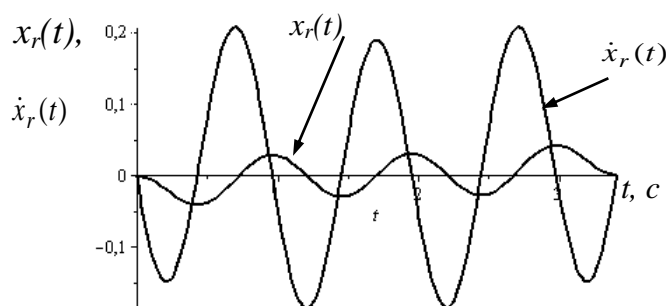


Рисунок 2.6 – Графики относительного движения $x_r(t)$, $\dot{x}_r(t)$

Сконструированное управление позволяет в связи с существованием множества корней уравнений (2.6) и (2.7) выбрать необходимое время переносного движения с учетом реальных свойств электроприводов для реализации такого движения.

Конструирование целенаправленного движения с использованием полинома для перемещения объекта предполагает обоснованный выбор степени полинома и условий, определяющих цель и характер движения.

Хотя критерий $J_1 = 2 \int_0^{T/2} (U_e(t) V_e(t))^2 dt$ более естественный по сравнению, например, с нормой мощности $J_2 = \int_0^T [U_e(t)]^2 dt$, но появляется нелинейное уравнение Эйлера высокого порядка, которое не имеет точного решения [3].

Под «кососимметричным» управлением движения объекта на интервале $T \geq t \geq 0$ подразумевается функция ускорения $U_e(t)$, подчиненная условиям:

$$\int_0^{T/2} U_e(t) dt = - \int_{T/2}^T U_e(t) dt, \quad |U_e(0)| = |U_e(T)|.$$

Функции $U_e(t)$ в общем случае соответствует уравнение Эйлера $F_{U_e} - \frac{d}{dt} F_{\dot{U}_e} + \frac{d^2}{dt^2} F_{\ddot{U}_e} + \dots = 0$ для восстанавливаемого функционала-критерия $\int_0^T F(U_e, \dot{U}_e, \ddot{U}_e, \dots) dt$, принимающего за приемлемое минимально возможное время T , определяемое из моментных соотношений в относительном движении упругого объекта, стационарное значение.

При таком подходе конструируемых оптимальных управлений для достижения поставленной цели движения естественно существенно больше, чем тех, которые находятся с использованием методов теории оптимального управления.

Кососимметричные ускорения обеспечивают перемещение за приемлемое минимальное время упругих объектов в состояние абсолютного либо относительного покоя без использования дополнительных средств подавления колебаний. Идея конструирования [43] состоит в выборе такого $U_e(t)$, при котором не только достигается цель движения, но и выполняются моментные соотношения в относительном движении упругого объекта. Такие ускорения (управления) применимы в ряде технологических процессов: в сборочном производстве; для повышения производительности процесса установки листов ДСП; при укладке листов трансформаторного железа в тару; для устранения колебаний элементов при монтаже печатных плат; при загрузке станка с использованием манипулятора; при установке без колебаний крупногабаритных шпилек (монтаж реакторов АЭС); для автоматизации упаковки бутылок в тару. Возможно их применение в литейном производстве, когда оптимальные ускорения необходимы для устранения расплескивания металла при быстром транспортировании ковша.

2.2. Перемещение упругого объекта с учетом линейно-вязкого сопротивления

Управление реализуется за счет задания скорости или ускорения и координат позиции, в которую исполнительный орган должен быть перемещен. Обычно во внимание не принимают линейно-вязкое сопротивление при переносном движении, а также колебательные процессы, возникающие в связи с наличием в конструкциях упругих элементов.

В работах [1,44] дано решение ряда задач оптимального переносного целенаправленного движения упругих объектов без учета сопротивления.

Для упругой системы с линейно-вязким сопротивлением (в относительном движении), участвующей в оптимальном переносном движении, показано, что

достижение абсолютного либо относительного покоя в конце движения возможно обеспечить, например, заданием специальных начальных условий в относительном движении.

В работах [1, 44] указана цель перемещения объекта ($m=1$ кг) – из состояния покоя ($S_e(0)=0, \dot{S}_e(0)=0$) на заданное расстояние L за время T в новое состояние покоя ($S_e(T)=L, \dot{S}_e(T)=0$). В отличие от задачи, приведенной в [44], для управления $U_e(t)$ принят полином четвертой степени с добавлением условия $U_e(T/2)=0$. Перемещение, скорость и ускорение в переносном движении имеют вид:

$$\begin{aligned} S_e &= \frac{1}{10} \frac{1}{T^3} \left(a \cdot t^2 (5 \cdot T^3 - 10tT^2 + 10t^2T - 4t^3) \right), \\ V_e &= \frac{a \cdot t(-t+T)(2t^2 - 2t \cdot T + T^2)}{T^3}, \\ U_e &= \frac{a(T-2t)^3}{T^3}, \quad a = \frac{10L}{T^2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В этой задаче уравнение Эйлера $\frac{d^6 S_e}{dt^6} = 0$ и критерий-функционал $\int_0^T (\dot{U}_e)^2 dt$.

Относительное движение (колебания упругого объекта, вызванные переносным движением) описывается дифференциальным уравнением с учетом линейно-вязкого сопротивления:

$$\frac{d^2 X_r}{dt^2} + 2n_1 \frac{dX_r}{dt} + k^2 X_r = -U_e(t),$$

где k – частота собственных колебаний (без учета сопротивления).

Если $n_1=0$, то при $X_r(0)=0, \dot{X}_r(0)=0$ время движения T , за которое достигается покой, находится из моментных соотношений для относительного движения.

Для момента времени $t=T, k=2\pi/T_1, T_1=T/n$, где T_1 – период колебаний упругого объекта, после преобразований моментные соотношения ($X_r(T)=0, \dot{X}_r(T)=0$) представляют собой систему трансцендентных уравнений:

$$X_r = 3 \sin(2\pi n) \pi^2 n^2 - 6 \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) \pi^3 n^3 + \\ + 6 \cos(2\pi n) \pi n - \pi^3 n^3 + 6\pi n = 0, \quad (2.9)$$

$$V_r = 3 \cos(2\pi n) \pi^2 n^2 - 6 \cos(2\pi n) + \sin(2\pi n) \pi^3 n^3 - \\ - 6 \sin(2\pi n) \pi n - 3\pi^2 n^2 + 6 = 0.$$

При $n_1 \neq 0$ достижение покоя за время T возможно в случае ненулевых начальных условиях ($X_r(0) = X_{r0}$, $\dot{X}_r(0) = \dot{X}_{r0}$), которые находятся из следующих моментных соотношений:

$$X_r(X_{r0}, \dot{X}_{r0}) = 0; \quad \dot{X}_r(X_{r0}, \dot{X}_{r0}) = 0. \quad (2.10)$$

Пример: $L = 1$ м; $T = 3,41$ с ; $k = 2\pi$ с⁻¹ ; $n_1 = k / 10$ с⁻¹; $T_1 = 2\pi / k$ с.

Моментные соотношения (2.10) представляют собой систему линейных уравнений, у которой неизвестными являются начальные условия:

$$0,117 \dot{X}_{r0} - 0,0844 X_{r0} + 0,0172 = 0, \quad -0,09912 \dot{X}_{r0} - 0,4618 X_{r0} + 0,03003 = 0.$$

Получено: $\dot{X}_{r0} = -0,393$ м/с, $X_{r0} = 0,1494$ м.

Графики (Рисунок 2.7) показывают, что в момент времени $t = T$ наступает абсолютный покой; при этом ускорения относительного и переносного движения равны по модулю и противоположно направлены $\ddot{X}_r(T) + U_e(T) = 0$.

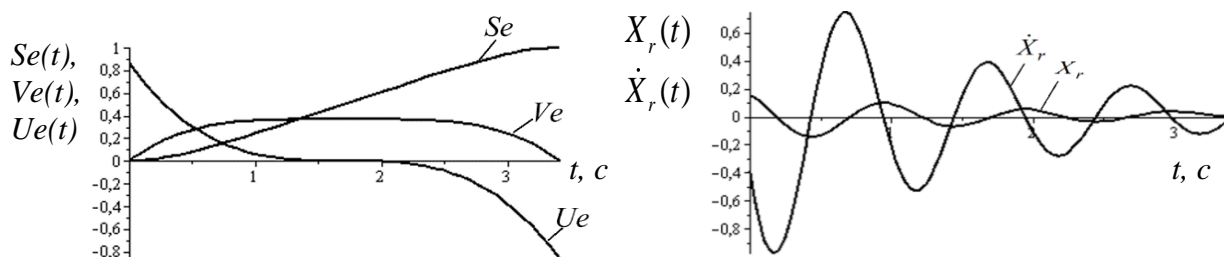


Рисунок 2.7 – Графики переносного и относительного движения

Оптимальные кососимметричные ускорения переносным целенаправленным движением упругих элементов систем применимы и в случаях, когда необходимо достичь абсолютного либо относительного покоя в конце переносного движения с учетом сопротивления.

На возможности использования оптимальных кососимметричных ускорений при реализации переносного движения упругих систем с конечным числом степеней свободы обращено внимание в работах [1, 3, 45].

2.3. Энергоемкость управлений перемещением объектов

В длительных процессах с повторяющимися движениями, реализуемыми приводами, возникает задача оптимальности управления с точки зрения затрат энергии на его реализацию. Так для формирования детали 3D-принтеру необходимо в течение длительного времени осуществлять формообразующие движения рабочих органов.

Технологический процесс формирования вентиляционной панели электронного аппарата размером 150x140x12 мм необходимо затратить от 8 до 12 часов, в зависимости от настроек (рабочей скорости, ускорений при печати).

Дано сравнение переносных движений объектов как абсолютно твёрдых и деформируемых тел при различных вариантах управлений. Использован подход, основанный на решении полных обратных задач вариационного исчисления, когда по заданной аналитической функции восстанавливается не только дифференциальное уравнение Эйлера, но и функционал, для которого восстановленное уравнение является первой вариацией [41,46].

Поиск ускорения объекта [15] представляет собой процедуру конструирования целенаправленного движения без предварительного использования критерия. Управление (ускорение) можно задать в виде линейной функции:

$$U_e(t) = C_1 + C_2 t, \quad (2.11)$$

где $C_1, C_2 = const$. С учетом краевых условий $U_e(0) = a$, $U_e(T) = -a$ следует известное в литературе управление:

$$U_e(t) = \frac{a}{T}(T - 2t), \quad (2.12)$$

где T – время движения; $a = \frac{6L}{T^2}$. Интегрируя дважды выражение (2.12) с учетом $S_e(0) = 0$, $V_e(0) = 0$ и $S_e(T) = L$, где L – общее перемещение за время T , получим известные выражения для скорости и перемещения:

$$V_e(t) = \frac{6Lt}{T^3}(T-t), \quad S_e(t) = \frac{Lt^2}{T^2}\left(3 - \frac{2t}{T}\right). \quad (2.13)$$

Как известно из [15], для поиска управления (ускорения) (2.12) обычно используется критерий оптимальности

$$I_1 = \int_0^T U_e^2(t) dt = \int_0^T (\ddot{S}_e)^2(t) dt, \quad (2.14)$$

которому соответствует уравнение Эйлера

$$\frac{d^4 S_e}{dt^4} = 0. \quad (2.15)$$

В работе [3] уравнение (2.15) получено вариационным методом.

Представляет интерес конструирование целенаправленного ускорения без привлечения вариационного метода теории оптимального управления. Управление задано в виде полинома

$$U_e(t) = \sum_{i=1}^4 C_i t^{i-1}, \quad (2.16)$$

где константы C_1, C_2, C_3, C_4 находятся из условий:

$$U_e(0) = a; \quad V_e(0) = 0; \quad S_e(0) = 0;$$

$$U_e(T) = -a; \quad \left. \frac{dU_e}{dt} \right|_{t=T/2} = 0; \quad \int_0^{T/2} U_e(t) dt + \int_{T/2}^T U_e(t) dt = 0.$$

После решения системы линейных алгебраических уравнений получены выражения для скорости, перемещения и управления (ускорения), что соответствует (2.8):

$$U_e(t) = \frac{10L}{T^5}(T-2t)^3, \quad V_e(t) = \frac{10Lt(T-t)(2t^2 - 2tT + T^2)}{T^5}, \quad (2.17)$$

$$S_e(t) = \frac{Lt^2}{T^3}(5T^3 - 10tT^2 + 10t^2T - 4t^3).$$

Здесь функционал-критерий имеет вид $I_2 = \int_0^T (\dot{U})^2 dt$.

Не исключается использование управления (ускорения) и в виде периодической кососимметричной гармонической функции, например

$$U_e(t) = a \cos(pt), \quad (2.18)$$

где $a, p = \text{const}$. С учетом краевых условий $S_e(0) = 0$, $V_e(0) = 0$, $S_e(T) = L$ и $p = \frac{\pi}{T}$ получены выражения для ускорения, скорости и перемещения:

$$U_e(t) = \frac{L\pi^2}{2T^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{T}t\right), \quad V_e(t) = \frac{L\pi}{2T} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right), \quad S_e(t) = \frac{L}{2}(1 - \cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)). \quad (2.19)$$

Здесь уравнение Эйлера $\frac{d^2 S_e}{dt^2} + \frac{\pi^2}{T^2} S_e = \frac{L\pi^2}{2T^2}$ и восстановленный функционал-критерий

$$I_3 = \int_0^T \left(\frac{\dot{S}_e^2}{2} - \frac{\pi}{2T^2} S_e^2 + \frac{L\pi^2}{T^2} S_e \right) dt. \quad (2.20)$$

Как и ранее, при перемещении упругой системы с одной степенью свободы уравнение относительного движения

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + k^2 x_r = -U_e(t), \quad (2.21)$$

где k – частота свободных колебаний ($k = 2\pi/T_1$, где T_1 – период). Уравнение (2.21) интегрировалось при $x_r(0) = 0$, $\dot{x}_r(0) = 0$.

Общее время движения найдено из моментных соотношений в переносном движении:

$$x_r(T) = 0, \quad \dot{x}_r(T) = 0. \quad (2.22)$$

Моментные соотношения после преобразований образуют систему трансцендентных уравнений с множеством общих корней. При управлении с критерием I_1 после преобразований система уравнений (2.22) приводится к виду (2.6):

$$\sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) \cdot \pi n - \pi n = 0, \quad \cos(2\pi n) + \sin(2\pi n) \cdot \pi n - 1 = 0. \quad (2.23)$$

Для управления с критерием I_2 из (2.29) следует система трансцендентных уравнений (2.7).

Управлению с критерием I_3 соответствует система моментных соотношений:

$$\frac{T^2}{4T^2 - 1} \cdot (\cos(2\pi T) + 1) = 0, \quad \frac{T^2}{4T^2 - 1} \cdot \sin(2\pi T) = 0 \quad (2.24)$$

Для всех случаев управлений приняты исходные данные: $m=1$ кг, $L=1$ м; $k=2\pi$ с⁻¹, т.е. $T_1=2\pi/k=1$ с. Значения энергии A и критерия W сведены в Таблицу 2.3.

Таблица 2.3 – Сравнения управлений по энергии

Тип управления	Критерии оптимальности	$A = 2 \int_0^{T/2} U_e V_e dt$, Дж	$W = I_1 = \int_0^T U_e^2 dt$	Время движения T , с
1	I_1	0,18	0,28	3,47
2	I_2	0,13	0,36	3,41
3	I_3	0,20	0,28	3,5

На Рисунке 2.8 изображены графики переносного движения, которое осуществляется (для абсолютно твердого тела, согласно 2.17) из исходного состояния покоя в конечное состояние абсолютного покоя.

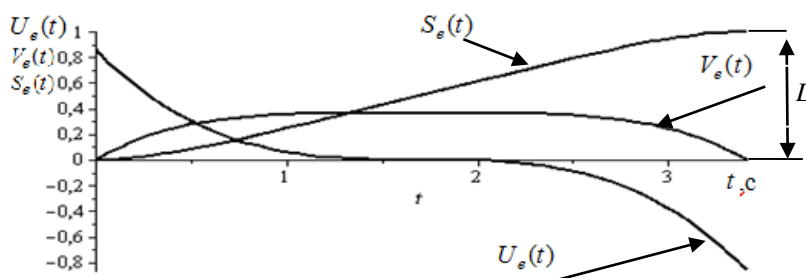


Рисунок 2.8 – Графики перемещения $S_e(t)$, скорости $V_e(t)$ и ускорения $U_e(t)$

На Рисунке 2.9 изображены графики относительного движения $x_r(t)$ и $\dot{x}_r(t)$

при $U_e(t) = \frac{10L}{T^5}(T-2t)^3$:

$$x_r(t) = -\frac{10L}{k^5 T^5} (6 \sin(kt) \cdot k^2 T^2 - 48 \sin(kt) - \cos(kt) \cdot k^3 T^3 + 24 \cos(kt) \cdot kT + k^3 T^3 - 24kT - 6t \cdot k^3 T^2 + 48kt + 12t^2 \cdot k^3 T - 8t^3 k^3),$$

$$v_r(t) = -\frac{10L}{k^4 T^5} (6 \cos(kt) \cdot k^2 T^2 - 48 \cos(kt) + \sin(kt) \cdot k^3 T^3 - 24 \sin(kt) \cdot kT - 6 \cdot k^2 T^2 + 48 + 24 \cdot tk^2 T - 24 \cdot k^2 T^2).$$

В фиксированный момент времени $x_r(T)=0$ и $\dot{x}_r(T)=0$. Таким образом, осуществляется перемещение упругого объекта из исходного состояния абсолютного покоя в конечное состояние абсолютного покоя.

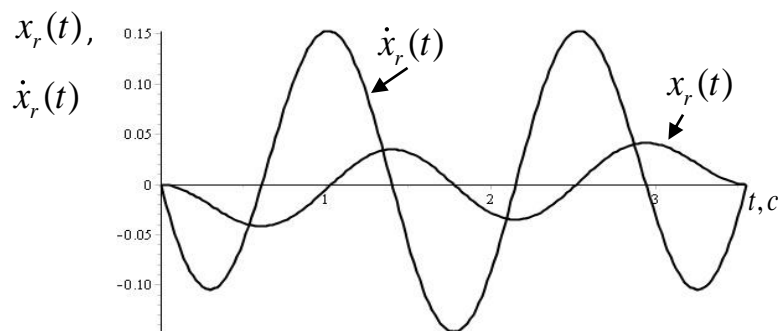


Рисунок 2.9 – Графики перемещения $x_r(t)$ и скорости $\dot{x}_r(t)$.

Итак, в [47,48] показано, что конструируемое управление (ускорение) обеспечивает достижение абсолютного покоя за время движения T .

2.4. Достаточные условия минимума восстановленного реверсионно функционала-критерия

Методы оценки экстремума функционалов изложены в ряде работ [49-51]. Поиск функционалов иллюстрируется на примерах [52], возникающих при реверсионном конструировании оптимальных управлений движением объектов. Очевиден экстремум известного функционала $I = \int_0^T U_e^2 dt$, который используется при поиске классическим вариационным методом оптимального управления движением объекта (без учета сопротивления движению, с дифференциальным уравнением $\frac{d^2 S_e}{dt^2} = U_e$). Как отмечено ранее, нелогичный результат возможно получить с использованием алгоритма реверсионного принципа оптимальности, который состоит в последовательной реализации этапов конструирования.

Цель оптимального движения, например, задана следующим образом:

$$S_e(0) = 0, \quad V_e(0) = 0; \quad S_e(T) = L, \quad V_e(T) = 0, \quad (2.25)$$

т.е. необходимо переместить объект из исходного состояния покоя (за фиксированное время T на расстояние L) в конечное состояние покоя.

Для определения типа экстремума функционала использовалась зависимость значения функционала от малого параметра ξ , характеризующего близость функций, образующих линейное нормированное функциональное пространство со «скелетной кривой», являющейся решением уравнения Эйлера.

Кривая $S_e(t)$ проходит через две точки $(0,0)$ и (T, L) , т.е. удовлетворяет граничным условиям: $S_e(0)=0, S_e(T)=L$.

Для определения в функциональном пространстве подходящих функций в ξ -окрестности нулевого порядка со скелетной кривой $S_e^\times(t)$ должно выполняться неравенство

$$\|S_e - S_e^\times\|_0 = \max |S_e(t) - S_e^\times(t)| < \xi, \quad t \in (0, T), \quad (2.26)$$

которое в данной задаче используется с учетом дополнительного условия для перемещения:

$$S_e\left(\frac{T}{2}\right) - \frac{L}{2} + \xi = 0, \quad (2.27)$$

где ξ – малый параметр.

Для описания оптимального перемещения объекта принят полином

$$S_e(t) = \sum_{i=1}^3 C_i t^{i+1}, \quad (2.28)$$

где C_1, C_2, C_3 – константы, которые найдены с учетом условий (2.25)-(2.27).

После факторизации полиномов, получены следующие выражения для перемещения, скорости и ускорения (управления):

$$\begin{aligned} S_e(t) &= \frac{t^2}{T^4} \left(-16T^2\xi + 3T^2L + 32Tt \cdot \xi - 2t \cdot Tl - 16\xi t^2 \right), \\ V_e(t) &= \frac{dS_e(t)}{dt} = \frac{2t}{T^4} (T-t) (-16T\xi + 3Tl + 32t\xi), \\ U_e(t) &= \frac{dV_e(t)}{dt} = \frac{2t}{T^4} \left(-16T^2\xi + 3T^2L + 96t \cdot T\xi - 6t \cdot Tl - 96\xi t^2 \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

При $\xi=0$ из (2.29) следуют известные выражения [3], полученные классическим вариационным методом:

$$S_e^\times(t) = \frac{Lt^2}{T^3}(3T - 2t), \quad V_e^\times(t) = \frac{6tL}{T^3}(T - t), \quad U_e^\times(t) = \frac{6L}{T^3}(L - 2t). \quad (2.30)$$

Графики (2.30) функций $S_e^\times(t)$, $V_e^\times(t)$, $U_e^\times(t)$ изображены на Рисунке 2.10.

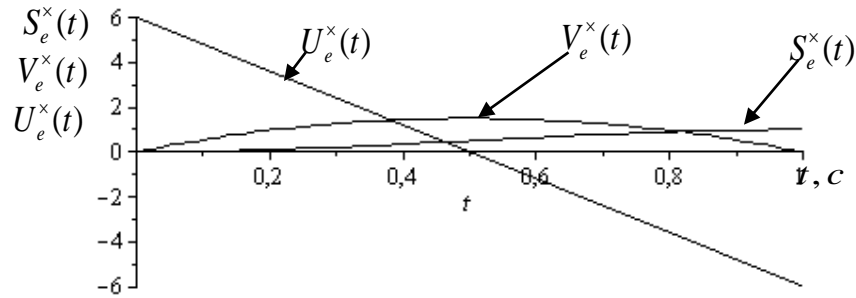


Рисунок 2.10 – Графики функций $S_e^\times(t)$, $V_e^\times(t)$, $U_e^\times(t)$

для управления с критерием $I = \int_0^T U_e^2 dt$

Графики близких функций $S_e^\times(t)$, $S_e(t)$, показаны на Рисунке 2.11

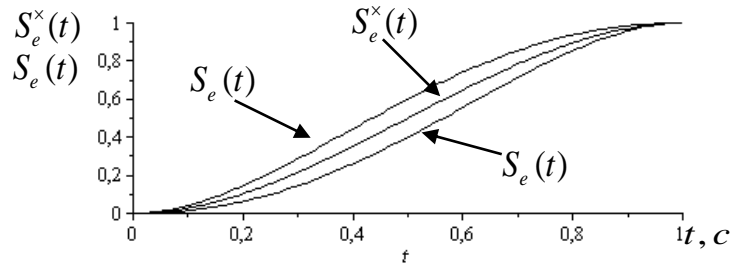


Рисунок 2.11 – Графики функций $S_e^\times(t)$, $S_e(t)$

На Рисунке 2.12 изображены графики скоростей $V_e^\times(t)$, $V_e(t)$ при малом изменении параметра ξ .

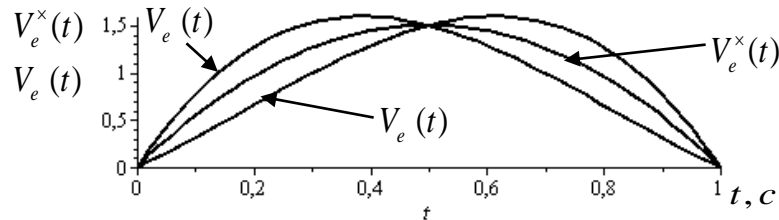


Рисунок 2.12 – Графики функций $V_e^\times(t)$, $V_e(t)$

По заданным значениям ξ получена табличная функция $I(\xi)$, которая аппроксимирована по способу наименьших квадратов аналитической функцией

$$I(\xi) = a\xi + b\xi^2 + I_0, \quad (2.31)$$

где $a, b, I_0 = const$. Для принятых исходных данных ($L=1$ м, $T=1$ с) функция (2.31) принимает вид ($a=0$):

$$I(\xi) = 12 + 204,8\xi^2. \quad (2.32)$$

График функции $I(\xi)$ изображен на Рисунке 2.13

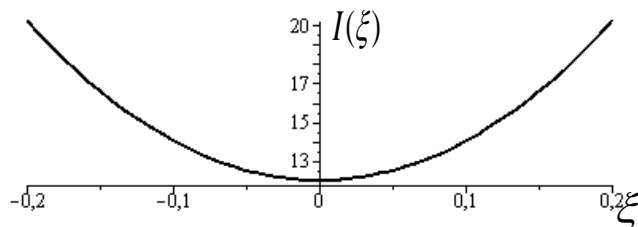


Рисунок 2.13 – График функции $I(\xi)$

График $I(\xi)$ подтверждает существование слабого минимума функционала-критерия $\int_0^T \dot{U}_e^2 dt$, отражающего оптимальность конструируемого управляемого движения объекта.

Дальше использованы достаточных условий для оценки экстремума нового типа функционала-критерия, возникающего при реверсионном конструировании кососимметричного оптимального ускорения целенаправленного движения объекта. Как и ранее, необходимо переместить объект из исходного состояния покоя в конечное состояние покоя с использованием реверсионно конструируемого кососимметричного управления движением.

Задача усложняется в связи с учетом дополнительных условий, отражающих свойство косо́й симметрии управления:

$$U_e(0) = b, \quad U_e(T) = -b, \quad \frac{dU_e}{dt}\left(\frac{T}{2}\right) = 0, \quad \int_0^{T/2} U_e(t) dt + \int_{T/2}^T U_e(t) dt = 0. \quad (2.33)$$

После известных преобразований для заданного полинома

$$S_e^*(t) = \sum_{i=1}^6 C_i t^{i-1}. \quad (2.34)$$

при вычислении значений констант выражения для перемещения, скорости и ускорения (управления) принимают вид:

$$S_e^*(t) = \frac{Lt^2}{T^5} (5T^3 - 10T^2t + 10t^2T - 4t^3), \quad (2.35)$$

$$V_e^*(t) = \dot{S}_e^*(t), \quad U_e^*(t) = \ddot{S}_e^*(t).$$

Графики функций $S_e(t)$, $V_e(t)$, $U_e(t)$ изображены на Рисунке 2.14.

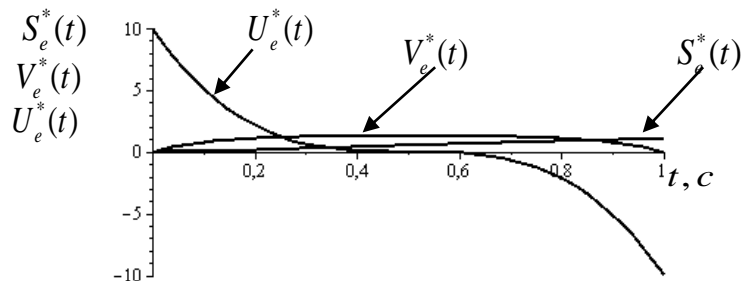


Рисунок 2.14 – Графики функций $S_e^*(t)$, $V_e^*(t)$, $U_e^*(t)$

В этой задаче согласно функциям (2.35) восстановлено уравнение Эйлера

$$\frac{d^6 S_e^*(t)}{dt^6} = 0, \quad (2.36)$$

которому соответствует функционал
$$I = \int_0^T (\ddot{S}_e^*(t))^2 dt \quad (2.37)$$

или, после замены переменных,

$$I = \int_0^T [\dot{U}_e^*(t)]^2 dt. \quad (4.38)$$

Если для выявления близких к «скелетной кривой» функций используется дополнительное условие, где ξ – малый параметр,

$$S_e\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{L}{2} + \xi, \quad (2.39)$$

то для близких функций степень полинома возрастает

$$S_e(t) = \sum_{i=3}^7 C_i t^{i-1}, \quad (2.40)$$

что позволило находить подходящие функции в поле экстремалей (близких к $S_e^*(t)$).

При $0,1 \geq \xi \geq -0,1$ на Рисунке 2.15 изображено ограниченное семейство функций, образующих поле экстремалей, выходящих из точки $(0,0)$ и не пересекающихся между собой.

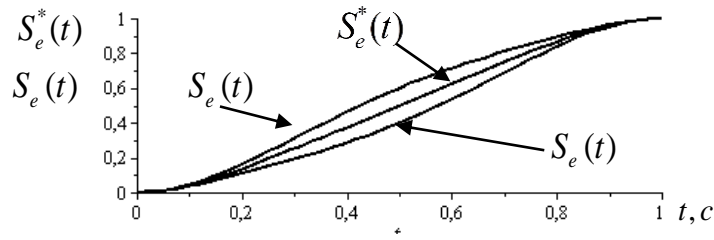


Рисунок 2.15 – Поле экстремалей

Для наглядности на Рисунке 2.16 дополнительно изображены графики $V_e^*(t)$, $V_e(t)$.

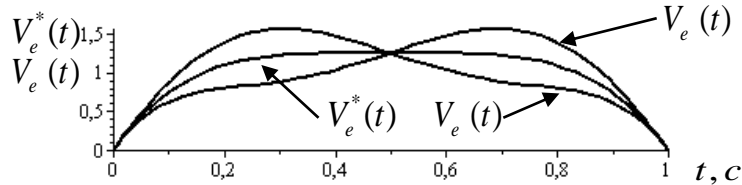


Рисунок 2.16 – Графики функций $V_e^*(t)$, $V_e(t)$

С использованием способа наименьших квадратов получена зависимость

$$I(\xi) = 21065,14\xi^2 + 720. \tag{2.41}$$

На Рисунке 2.17 изображен График $I(\xi)$, отражающий слабый минимум функционала-критерия.

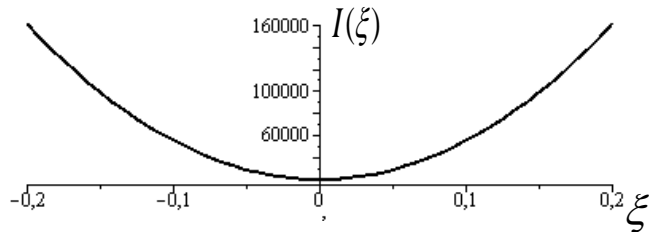


Рисунок 2.17 – График $I(\xi)$

Тип экстремума функционала проверен также с использованием классических достаточных условий (Якоби, Вейерштрасса и Лежандра).

Условие Якоби. Условие предполагает [53], что допустимая кривая, являясь решением уравнения Эйлера, должна принадлежать полю экстремалей из которого

после преобразований следует уравнение Якоби. Для функционала $\int_0^T [\dot{U}_e]^2 dt$

уравнение Якоби принимает вид:

$$\left[F_{U_e U_e} - \frac{d}{dt} F_{U_e \dot{U}_e} \right] \tau(t) - \frac{d}{dt} \left[F_{\dot{U}_e \dot{U}_e} \cdot \dot{\tau}(t) \right] = 0, \tag{2.42}$$

где $F = [\dot{U}_e]^2$, $F_{U_e U_e} = 0$; $F_{U_e \dot{U}_e} = 0$; $F_{\dot{U}_e \dot{U}_e} = 2$, $\frac{d}{dt} [F_{\dot{U}_e \dot{U}_e} \cdot \dot{\tau}(t)] = 2\ddot{\tau}(t) = 0$.

И, следовательно, в данном случае дифференциальное уравнение Якоби

$$\frac{d^2\tau(t)}{dt^2} = 0, \quad (2.43)$$

которое имеет решение

$$\tau(t) = C_1 t + C_2. \quad (2.44)$$

Так как при $t=0$, $\tau(0) = 0$, то $C_2 = 0$ и $\tau(t) = C_1 t$.

Можно отметить, что $S_e(0) = 0$, $\tau(t) = \frac{d S_e(t, c)}{d C}$, то, следовательно, при $t=0$, $\tau(t) = 0$.

Функция $\tau(t)$ обращается в нуль только в точке $t=0$; условие Якоби выполнено, т.е. $\tau(t)$ можно включить в центральное поле экстремалей с центром в точке $(0,0)$. Итак, функция $\tau(t) = C_1 t$ принадлежит центральному полю экстремалей.

Условие Вейерштрасса [53]. Для исследуемого функционала, если функция $E(t, \dot{U}, p) \geq 0$, то функционал имеет минимум. Функционалу $\int_0^T E(t, \dot{U}_e, p) dt$ соответствует функция Вейерштрасса:

$$\begin{aligned} E(t, \dot{U}, p) &= F(t, \dot{U}) - F(t, p) - (\dot{U} - p), \\ \text{или } F_p(t, p) &= \dot{U}^2 - p^2 - 2p\dot{U} + p^2 = (\dot{U} - p)^2. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Следовательно $(\dot{U} - p)^2 \geq 0$, т.е. условие Вейерштрасса, подтверждающее существование минимума функционала-критерия, выполнено.

Условие Лежандра [53]. В данном случае усиленное условие имеет вид

$$F_{\dot{U}\dot{U}} = 2 \geq 0, \quad (2.46)$$

что подтверждает минимум функционала.

Важной характеристикой оптимальных управлений являются энергетические затраты на их практическую реализацию. При управлении движением объекта (2.30) с $m=1$ кг, $L=1$ м, $T=1$ с энергия, затраченная на управление,

равна $W = 2 \int_0^{T/2} m U_e^*(t) \cdot V_e^*(t) dt = 2,25$ Дж, а при управлении (2.35) она соответственно

равна 1,5625 Дж.

Очевидно, что для управления типа «разгон-торможение» с достижением цели движения возможно некоторое «брахистохронное» оптимальное управление, которое позволяет существенно снизить затраты энергии как на разгон, так и на торможение объекта с достижением требуемого состояния покоя ($S_e(T) = L$, $V_e(T) = 0$).

2.5 Оценка энергетических затрат на реализацию целенаправленного движения

При конструировании целенаправленного ускорения разгон-торможение выявлена характерная закономерность: со стремлением степени задаваемого полинома к бесконечности энергоемкость по сравнению с известным управлением, найденным классическим вариационным методом с использованием заранее задаваемого критерия в виде нормы мощности, уменьшается в предельном случае в два раза, т.е. можно записать

$$\int_0^{T/2} U_n V_n dt \approx \int_0^{T/2} UV dt / 2. \quad (2.47)$$

$$n \rightarrow \infty$$

Если [15] при использовании критерия нормы мощности $\left(\int_0^T U^2 dt \right)$ управления $U = 6L(T - 2t)/T^3$ (при $m = 1$ кг) энергия $A = \frac{2.25L^2}{T^2}$ (Дж), то уже при $n = 3$ и соответствующем ускорении $U_3 = \frac{10L}{T^5}(T - 2t)^3$ энергия уменьшается до $A_3 = 1.5625 \frac{L^2}{T^2}$ (Дж).

Для получения зависимости энергии от степени используемого полинома составлена Таблица 2.4.

Таблица 2.4 – Зависимость энергоемкости от степени полинома конструируемого ускорения.

Степень полинома n	1	3	5	7	9	11	13
Коэффициент K в энергии $A = K \frac{L^2}{T^2}$	2.25	1,5625	1,36	1,206	1,19	1,17	1,124

Достаточно простой регрессионной зависимостью энергии от степени полинома переносного ускорения является, например:

$$A(n) = \left(K + \frac{K}{n} \right) \frac{L^2}{T^2}, \quad (2.48)$$

где $K = 2,25/2$. С ростом степени полинома (Рисунок 2.18) при $n \rightarrow \infty$ энергия становится близкой к половине энергии, соответствующей степени полинома при $n = 1$.



Рисунок 2.18 – График зависимости энергии от степени полинома $A(n)$

Не исключается применение [54-61] алгоритма конструирования целенаправленного ускорения с учетом предельного значения энергоемкости, при которой все еще достигается цель движения – перемещение объекта на заданное расстояние за заданное время в новое состояние переносного покоя.

Предельное значение энергии

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} 2m \cdot \int_0^{T/2} U_e(t) \cdot V_e(t) dt = m \frac{L^2}{T^2} \operatorname{evalf} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}, n = \text{infinity} \right) = m \frac{L^2}{T^2}. \quad (2.49)$$

Таким образом, зависимость энергии от степени полинома при $m=1$ кг, $L=1$ м, $T=1$ м принимает вид $A(n) = \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}$ и график $A(n)$ близок к графику, изображенном на Рисунке 2.18.

Пример 1. Известному варианту управления соответствуют зависимости для ускорения, скорости и перемещения:

$$U(t) = \frac{6L(T-2t)}{T^2}, \quad V(t) = \frac{6Lt(T-t)}{T^3}, \quad S(t) = \frac{Lt^2(3T-2t)}{T^3}.$$

Графики $U(t)$, $V(t)$ и $S(t)$ на Рисунке 2.19 а), б).

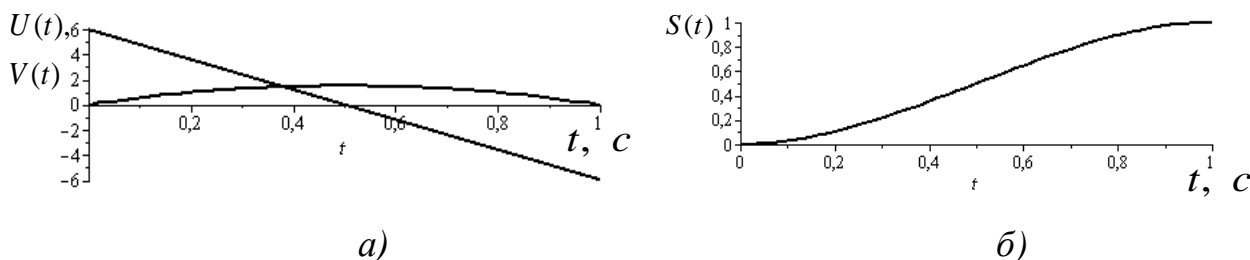


Рисунок 2.19 — Графики: а) скорости и ускорения; б) перемещения

Без учета сопротивления дифференциальное уравнение относительного движения (по отношению к осям, движущимся поступательно)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = -U(t),$$

где k — частота собственных колебаний упругого объекта. Период колебаний $T_1 = 2\pi/k$. Полагая общее время движения $T = T_1 r$ или $T = 2\pi r/k$, при $t = T$ из моментных соотношений, которые означают равенство нулю перемещения и скорости в относительном движении в момент времени $t = T$ ($x(T) = 0$, $\dot{x}(T) = 0$), после преобразований, получена система трансцендентных уравнений:

$$x(r) = \sin(2\pi r) - \cos(2\pi r)\pi r - \pi r = 0, \quad \dot{x}(r) = \cos(2\pi r) + \sin(2\pi r)\pi r - 1 = 0.$$

В интервале $r = 1.3 - 3.6$ на графиках (Рисунок 2.20) показаны три общих корня системы уравнений. Наименьший корень равен 1.43 и при $k = 8.985$ время движения $T = 1$ с

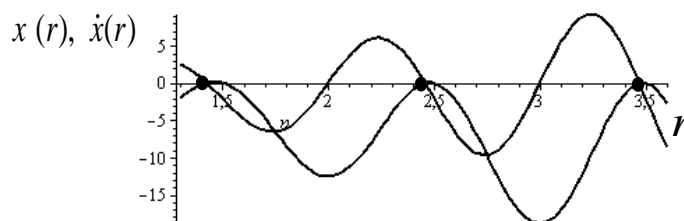


Рисунок 2.20 — Графики моментных соотношений

Графики колебаний упругого объекта ($x(t)$, $\dot{x}(t)$) в интервале движения ($T \geq t \geq 0$) изображены на Рисунке 2.21. В конце движения наступает абсолютный покой ($\dot{S}_e(T) = 0$, $S_e(T) = L$; $x(T) = 0$, $\dot{x}(T) = 0$).

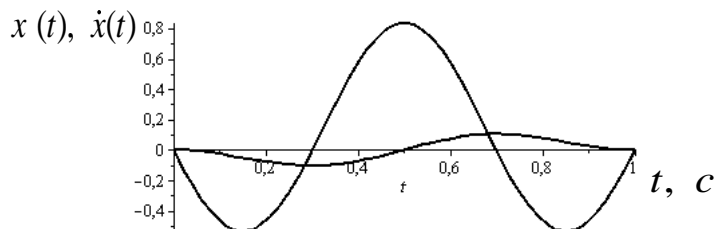


Рисунок 2.21 — Перемещение и скорость в относительном движении

Пример 2. При конструировании движения объекта с предполагаемой минимальной энергией использован полином

$$S(t) = \sum_{i=1}^5 C_i t^{i+1},$$

где $C_i = \text{const}$. Для скорости и ускорения следуют зависимости: $V(t) = dS/dt$; $U(t) = dV/dt$. Константы определены с использованием краевых условий, условия косо́й симметрии переносного ускорения и заданной энергоёмкости:

$$S(T) = L; \quad U(0) + U(T) = 0; \quad U(T/2) = 0;$$

$$\int_0^{T/2} U(t) dt + \int_{T/2}^T U(t) dt = 0; \quad \int_0^{T/2} U(t)V(t) dt - \frac{A_1}{2} = 0,$$

где $A_1 = \frac{2,25L^2}{T^2}$; При $T=1$ с, $L=1$ м графики $U(t)$, $V(t)$ и $S(t)$ изображены на Рисунке 2.22.

$$U(t) = 13.0294 - 96.3532t + 210.8831t^2 - 140.5887t^3 + 2.22758 \cdot 10^{-8} t^4.$$

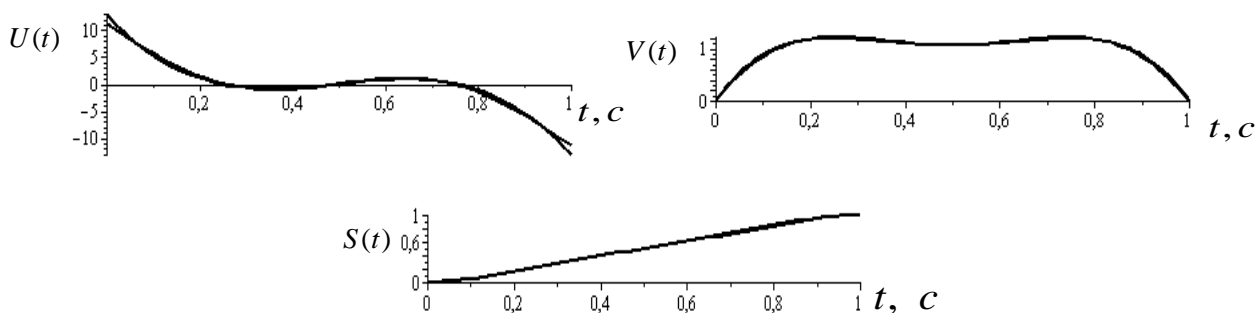


Рисунок 2.22 — Совмещенные графики ускорений, скоростей и перемещений

Пример 3. В качестве переносного ускорения принята функция:

$$U(t) = a \sin pt + bt + c,$$

где $a, b, c = \text{const}$. С использованием $U(t)$ следуют выражения для скорости и ускорения:

$$V(t) = \int U(t) dt + C_1; \quad S(t) = \int V(t) dt + C_2.$$

Для определения произвольных постоянных a, b, c, C_1, C_2 приняты условия:

$$S(0) = 0; V(0) = 0; S(T) = L, V(T) = 0, 2 \int_0^{T/2} UV dt - \frac{A_1}{2} = 0, \text{ которые образуют систему}$$

нелинейных уравнений; ее численное решение найдено при $T = 1 \text{ с}$, $L = 1 \text{ м}$,

$p = 2\pi \text{ с}^{-1}$; для принятых исходных данных получено ускорение:

$$U(t) = -5.5209 \sin(2\pi t) - 22.5441t + 11.2720.$$

Графики $U(t)$, $V(t)$ и $S(t)$ совмещены с графиками, изображенными на Рисунке 2.22; они практически совпадают с предыдущими графиками. Сравнение вариантов по интегральным характеристикам дано с использованием Таблицы 2.5.

Таблица 2.5 – Обобщенные интегральные характеристики ускорений

№ примера	Обобщенные интегральные критерии			
	$J_1 = \int_0^T U^2 dt$ Норма мощности	$J_2 = 2 \int_0^{T/2} UV dt$ Энергия	$J_3 = 2 \int_0^T V^2 dt$ Действие (по Лагранжу)	$J_4 = J_2 \cdot J_3$ Энергодействие
1	$12 \frac{L^2}{T^3}$	$2,25 \frac{L^2}{T^2}$	$1,2 \frac{L^2}{T}$	$2,7 \frac{L^4}{T^3}$
2	$19,06 \frac{L^2}{T^3}$	$1,125 \frac{L^2}{T^2}$	$1,078 \frac{L^2}{T}$	$1,212 \frac{L^4}{T^3}$
3	$17,97 \frac{L^2}{T^3}$	$1,125 \frac{L^2}{T^2}$	$1,088 \frac{L^2}{T}$	$1,224 \frac{L^4}{T^3}$

Как следует из Таблицы 2.5, сконструированное ускорение (номер 2) обладает преимуществом (в смысле экономии энергии для достижения цели движения) по сравнению с примером с номер 1.

2.6 Обобщение алгоритма реверсионного конструирования целенаправленных движений

В представленных примерах [62, 63] конструирования целенаправленного движения объекта осуществлялся синтез переносного ускорения (управления), позволяющего осуществить перемещение объекта из начального состояния покоя ($S_e(0)=0$, $V_e(0)=0$) в конечное состояние покоя ($S_e(T)=L$, $V_e(T)=0$) за время T , определяемое из моментных соотношений $x_r(T)=0$, $\dot{x}_r(T)=0$. Во всех примерах был реализован следующий алгоритм:

1. Задание линейных либо угловых перемещений (ускорений) в виде полиномов.
2. Формализация цели движения, краевых условий и косо́й симметрии ускорения.
3. Факторизация полиномов.
4. Восстановление уравнения Эйлера и соответствующего ему функционала-критерия.
5. Определение времени движения упругого объекта как одного из общих корней системы трансцендентных уравнений (моментных соотношений в относительном движении) с графической визуализацией решения.

Обобщение результатов исследований по реализации данного алгоритма позволило для ускорения переносного движения записать формулу

$$U_e(t) = \frac{L(2n+4)(T-2t)^n}{T^{n+2}}, \quad (2.50)$$

из которой следуют известные частные случаи; n – степень полинома, целое нечетное число (1,3,5,7, ...). Скорость и перемещение: $V_e = \int U_e dt + C_1$, $S_e = \int V_e dt + C_2$.

С учётом $t = 0$, $V_e(0) = 0$ и $S_e(0) = 0$ получено:

$$V_e = \frac{L}{T(n+1)} \left(1 - (T-2t)^{n+1} \cdot T^{-n-1} \right), \quad S_e = \frac{L}{2T(n+1)} \left(T^{-n-1} (T-2t)^{n+2} + 2tn + 4t - T \right). \quad (2.51)$$

С использованием зависимостей (2.50) и (2.51) получены выражения для $U_e(t), V_e(t)$ и $S_e(t)$ при $n = 1, 7, 19$ при перемещении на расстояние $L=1\text{м}$. Время движения определялось из моментных соотношений, полученных для каждого сконструированного ускорения (Глава 2.4, пример 1).

Таблица 2.6 – Конструирование движения для полиномов степеней $n=1, 7$ и 19

$n=1$	
Функции переносных ускорения $U_e(t)$, скорости $V_e(t)$ и перемещения $S_e(t)$	
$U_e(t) = \frac{6L(T-2t)}{T^3},$ $V_e(t) = -\frac{3L}{2T} \left(\frac{(T-2t)^2}{T^2} - 1 \right),$ $S_e(t) = \frac{L}{4T} \left(\frac{(T-2t)^3}{T^2} + 6t - T \right)$	<p style="text-align: center;">Рисунок 2.23 – Графики ускорения $U_e(t)$, скорости $V_e(t)$, перемещения $S_e(t)$</p>
Моментные соотношения $x_r(T)=0, \dot{x}_r(T)=0; k=2\pi/T_1, T_1=T/r$	
$x_r(t) = -\frac{12 \sin(kt)L}{T^3 k^3} + \frac{6 \cos(kt)L}{k^2 T^2} - \frac{6L(T-2t)}{k^2 T^3}, \quad \dot{x}_r(t) = -\frac{12 \cos(kt)L}{T^3 k^2} - \frac{6 \sin(kt)L}{k T^2} + \frac{12L}{k^2 T^3}$	
Рисунок 2.24 – Моментные соотношения и уточнение времени ($n=1$)	
$n=7$	
Функции переносных ускорения $U_e(t)$, скорости $V_e(t)$ и перемещения $S_e(t)$	

$$U_e(t) = \frac{18L(T-2t)^7}{T^9},$$

$$V_e(t) = -\frac{9L}{8T} \left(\frac{(T-2t)^8}{T^8} - 1 \right),$$

$$S_e(t) = \frac{L}{16T} \left(\frac{(T-2t)^9}{T^8} + 18t - T \right)$$

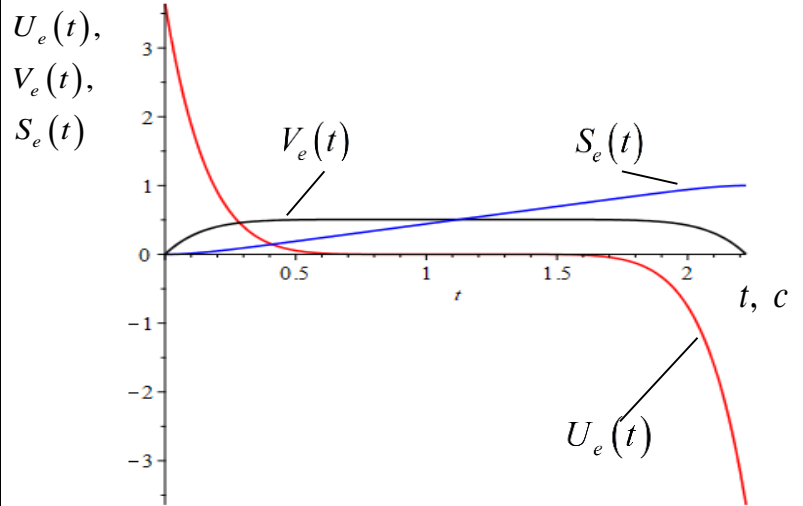


Рисунок 2.25 – Графики ускорения $U_e(t)$, скорости $V_e(t)$, перемещения $S_e(t)$

Моментные соотношения $x_r(T) = 0, \dot{x}_r(T) = 0; k = 2\pi/T_1, T_1 = T/r$

$$x_r(t) = -\frac{252L \sin(kt)(T^6 k^6 - 120T^4 k^4 + 5760k^2 T^2 - 46080)}{T^9 k^9} +$$

$$+ \frac{18L \cos(kt)(T^6 k^6 - 168T^4 k^4 + 13440k^2 T^2 - 322560)}{T^8 k^8} -$$

$$- \frac{18L(-322560 + k^6(T-2t)^6 - 168k^4(T-2t)^4 + 13440k^2(T-2t)^2)(T-2t)}{T^9 k^8},$$

$$\dot{x}_r(t) = -\frac{252L \cos(kt)(T^6 k^6 - 120T^4 k^4 + 5760k^2 T^2 - 46080)}{k^8 T^9} -$$

$$- \frac{18L \sin(kt)(T^6 k^6 - 168T^4 k^4 + 13440k^2 T^2 - 322560)}{k^7 T^8} -$$

$$- \frac{18L k^6(-12(T-2t)^5 + 1344k^4(T-2t)^3 - 53760k^2(T-2t))(T-2t)}{T^9 k^8} +$$

$$+ \frac{36L(-322560 + k^6(T-2t)^6 - 168k^4(T-2t)^4 + 13440k^2(T-2t)^2)}{T^9 k^8}$$

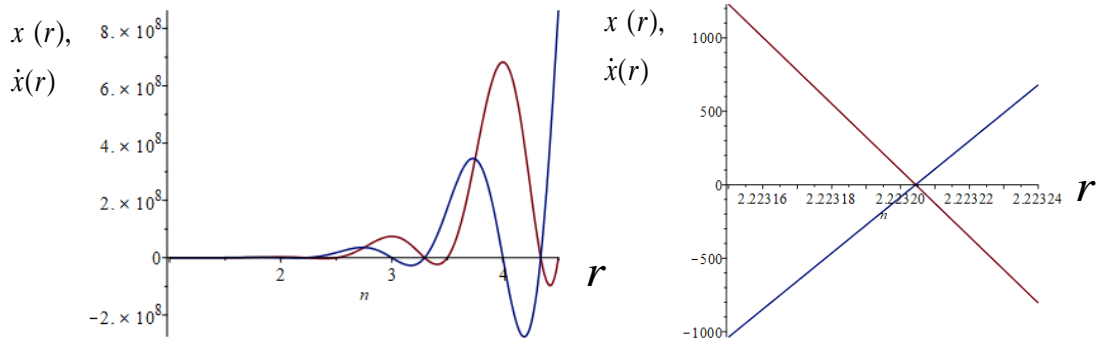


Рисунок 2.26 – Моментные соотношения и уточнение времени ($n=7$)

$n=19$	
Функции переносных ускорения $U_e(t)$, скорости $V_e(t)$ и перемещения $S_e(t)$	
$U_e(t) = \frac{42L(T-2t)^{19}}{T^{21}},$ $V_e(t) = -\frac{21L}{20T} \left(\frac{(T-2t)^{20}}{T^{20}} - 1 \right),$ $S_e(t) = \frac{L}{40T} \left(\frac{(T-2t)^{21}}{T^{20}} + 42t - T \right)$	<p style="text-align: center;">Рисунок 2.27 – Графики ускорения $U_e(t)$, скорости $V_e(t)$, перемещения $S_e(t)$</p>
Моментные соотношения $x_r(T) = 0, \dot{x}_r(T) = 0; k=2\pi/T_1, T_1=T/r$	
$x_r(t) = -\frac{1}{T^{21}k^{21}} [1596L \sin(kt) [T^{18}k^{18} - 1224T^{16}k^{16} + 1175040T^{14}k^{14} - 855429120T^{12}k^{12} +$ $+ 451666575360T^{10}k^{10} - 162599967129600T^8k^8 + 36422392637030400T^6k^6 -$ $- 4370687116443648000T^4k^4 + 209792981589295104000T^2k^2 - 1678343852714360832000]] +$ $+ \frac{1}{T^{20}k^{20}} [42L \cos(kt) [T^{18}k^{18} - 1368T^{16}k^{16} + 1488384T^{14}k^{14} - 1250242560T^{12}k^{12} +$ $+ 780151357440T^{10}k^{10} - 343266597273600T^8k^8 + 98860780014796800T^6k^6 -$ $- 16608611042485862400T^4k^4 + 1328688883398868992000T^2k^2 - 31888533201572855808000]] -$ $- \frac{1}{T^{21}k^{20}} [42L(T-2t) [-31888533201572855808000 + (T-2t)^{18}k^{18} - 1368(T-2t)^{16}k^{16} +$ $+ 1488384(T-2t)^{14}k^{14} - 1250242560(T-2t)^{12}k^{12} + 780151357440(T-2t)^{10}k^{10} -$ $- 343266597273600(T-2t)^8k^8 + 98860780014796800(T-2t)^6k^6 -$ $- 16608611042485862400(T-2t)^4 + 1328688883398868992000(T-2t)^2k^2]],$ $\dot{x}_r(t) = -\frac{1}{T^{20}k^{21}} [1596L \cos(kt) [T^{18}k^{18} - 1224T^{16}k^{16} + 1175040T^{14}k^{14} - 855429120T^{12}k^{12} +$ $+ 451666575360T^{10}k^{10} - 162599967129600T^8k^8 + 36422392637030400T^6k^6 -$ $- 4370687116443648000T^4k^4 + 209792981589295104000T^2k^2 - 1678343852714360832000]] -$ $- \frac{1}{T^{19}k^{20}} [42L \sin(kt) [T^{18}k^{18} - 1368T^{16}k^{16} + 1488384T^{14}k^{14} - 1250242560T^{12}k^{12} +$ $+ 780151357440T^{10}k^{10} - 343266597273600T^8k^8 + 98860780014796800T^6k^6 -$	

$$\begin{aligned}
& -16608611042485862400T^4k^4 + 1328688883398868992000T^2k^2 - 31888533201572855808000] + \\
& + \frac{1}{T^{21}k^{20}} [84L[-31888533201572855808000 + (T-2t)^{18}k^{18} - 1368(T-2t)^{16}k^{16} + \\
& + 1488384(T-2t)^{14}k^{14} - 1250242560(T-2t)^{12}k^{12} + 780151357440(T-2t)^{10}k^{10} - \\
& - 343266597273600(T-2t)^8k^8 + 98860780014796800(T-2t)^6k^6 - \\
& - 16608611042485862400(T-2t)^4k^4 + 1328688883398868992000(T-2t)^2k^2 - \\
& - \frac{1}{T^{21}k^{20}} [42L(T-2t)[-36(T-2t)^{17}k^{18} + 43776(T-2t)^{15}k^{16} - 41674752(T-2t)^{13}k^{14} + \\
& + 30005821440(T-2t)^{11}k^{12} - 15603027148800(T-2t)^9k^{10} + 5492265556377600(T-2t)^7k^8 - \\
& - 1186329360177561600(T-2t)^5k^6 + 132868888339886899200(T-2t)^3k^4 - \\
& - 5314755533595475968000(T-2t)k^2]].
\end{aligned}$$

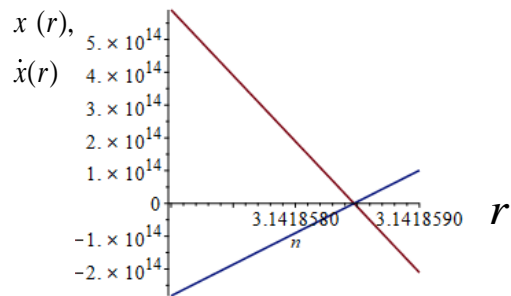
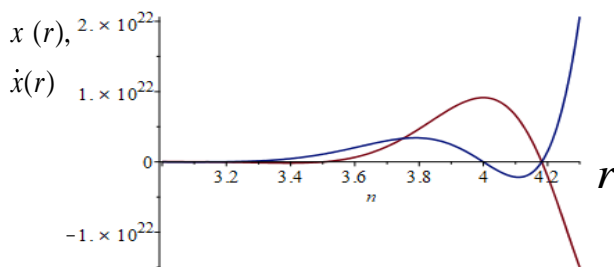


Рисунок 2.28 – Моментные соотношения и уточнение времени ($n=19$)

Для приведенных выше значений n вычисляется энергия согласно зависимости $J_n = 2 \int_0^{T/2} U_n V_n dt$ и, таким образом, при:

– $n=1$ и времени $T= 1,430$ с энергоемкость $J_1 = 2 \int_0^{T/2} U_1 V_1 dt = 1,1$ Дж;

– $n=1$ и времени $T= 2,459$ с энергоемкость $J_1 = 2 \int_0^{T/2} U_1 V_1 dt = 372,1 \cdot 10^{-3}$ Дж;

– $n=7$ и времени $T= 2,2232$ с энергоемкость $J_7 = 2 \int_0^{T/2} U_7 V_7 dt = 256,06 \cdot 10^{-3}$ Дж;

– $n=19$ и времени $T= 3,14185$ с энергоемкость $J_{19} = 2 \int_0^{T/2} U_{19} V_{19} dt = 111,69 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Представляет интерес изменение формы переносных ускорения $U_e(t)$, скорости $V_e(t)$ и перемещения $S_e(t)$, если рассматривать их без привязки к времени, найденного из моментных соотношений. Пусть, переносное движение осуществляется за время $T=1$ с, тогда графики движения примут вид, представленный на Рисунках 2.29-2.31.

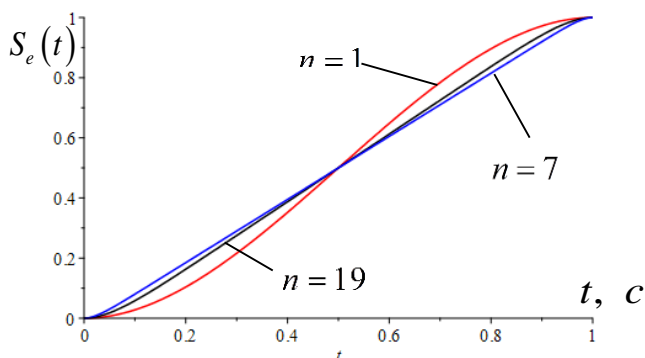


Рисунок 2.29 – Графики перемещения $S_e(t)$ при $n=1, n=7, n=19$

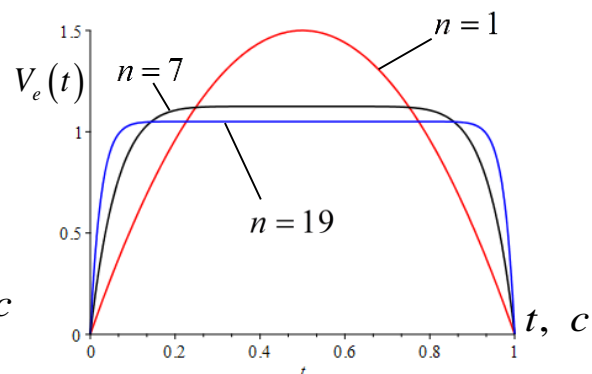


Рисунок 2.30 – Графики скорости $V_e(t)$ при $n=1, n=7, n=19$

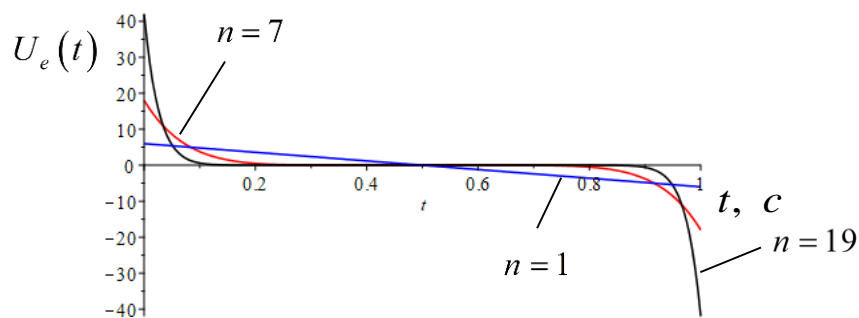


Рисунок 2.31 – Графики ускорения $U_e(t)$ при $n=1, n=7, n=19$

При повышении степени n полиномов движение стремится к равномерному.

Выводы по разделу

С использованием алгоритма полной обратной задачи вариационного исчисления в результате реверсионного конструирования получены и исследованы управления (ускорения) переносным движением объектов конечной жесткости.

Показано, что с ростом степени задаваемого полинома энергия для реализации оптимального целенаправленного ускорения (управления) типа «разгон-торможение» стремится к предельному минимальному значению.

В системах, содержащих упругие элементы (например, 3D-принтеры), динамическое поведение влияет на качество изготовления изделий и требует ограничений на скоростные режимы.

Представляется возможность принять ускорения (управления) с учетом минимума энергии, необходимой на реализацию формообразующих движений исполнительных элементов как при удалении (обработка резаньем), так и при добавлении (в аддитивных технологиях) материала.

состав I и II входят упругие зубчатые ремни 3. Линейное перемещение осуществляется по парам направляющих 4.1 и 4.2.

Принимая во внимание актуальность и значимость развивающейся отрасли аддитивных технологий, а также наличия в конструкциях манипуляторов и 3D-принтеров элементов конечной жесткости, влияющих на режимы работы, они будут использованы в качестве примера имплементации целенаправленных движений.

3.1. Реализация траекторий схвата манипулятора (печатающей головки)

Для исполнительных органов (рук) манипуляторов, работающих в полярной и декартовой системах координат, исследованы управления для реализации заданных формообразующих траекторий движения схвата с аддитивным рабочим органом. Применение манипуляторов в аддитивных технологиях [64-69] предполагает оптимальное управление исполнительными органами для перемещения схвата 3D-принтера-манипулятора (Рисунок 3.2) по задаваемым траекториям при добавлении материала в заданных точках позиционирования.

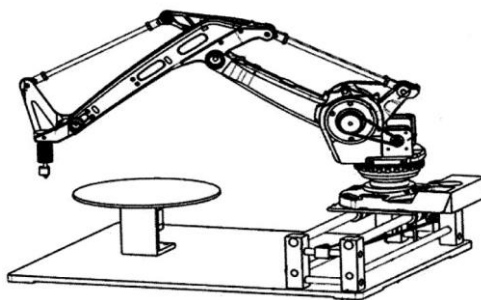


Рисунок 3.2 – 3D-принтер-манипулятор (пат. № CN105965897A)

Программирование таких операций связано с решением задач описания кинематических и динамических свойств движения элементов манипулятора, применением алгоритма обратных задач динамики, конструированием управления для реализации формообразования предполагаемого изделия.

Возникает задача определения управлений для реализации заданной траектории движения схвата манипулятора с рабочим органом. С этой целью решены обратные задачи динамики при задании траекторий в виде окружности и

отрезка прямой для манипуляторов, работающих в полярной либо декартовой системах координат.

Задача 1. Реализация движения схвата с рабочим органом по окружности для манипулятора, работающего в полярной системе координат.

Планируется движение рабочей точки схвата манипулятора с рабочим органом по окружности $(x-a)^2 + (y-a)^2 = R^2$ с постоянной по модулю скоростью v (Рисунок 3.3).

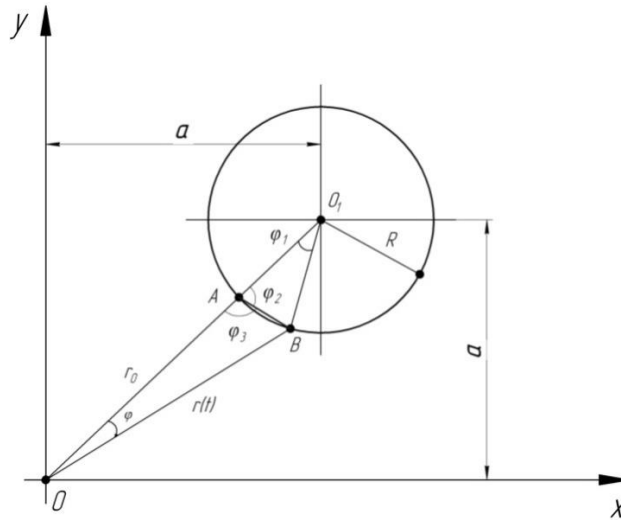


Рисунок 3.3 – Воспроизведение траектории кольца манипулятором (полярная система координат)

Необходимо найти закон изменения полярных координат $\varphi(t)$ и $r(t)$ и компоненты управления, которые обеспечивают реализацию требуемого движения.

При длине дуги $s = vt$ выражения для углов $\phi_1 = \frac{s}{R}$, $\phi_2 = \frac{(2\pi - \phi_1)}{2}$, $\phi_3 = \pi - \phi_2$.

Определяются стороны треугольника $\triangle OAB$: $AB = 2R \cdot \sin \frac{\phi_1}{2}$,

$$OB = r(t) = \sqrt{r_0^2 + AB^2 - 2r_0 \cdot AB \cdot \cos \phi_3}.$$

Угол поворота телескопической руки ($\triangle OAB$, теорема синусов) равен:

$$\varphi(t) = \arcsin \left(\frac{AB \cdot \sin \phi_3}{r} \right).$$

В полярной системе координат компоненты ускорений (вдоль руки и перпендикулярной ей):

$$a_r = \ddot{r} - r\ddot{\phi}, \quad a_h = -(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}). \quad (3.1)$$

Исходная длина руки принята согласно Рисунку 3.3:

$$r_0 = \sqrt{a^2 + b^2} - R. \quad (3.2)$$

Обход схватом кольца ($s = 2\pi R$) с постоянной скоростью осуществляется за время

$$T = \frac{2\pi R}{v}.$$

Численный пример. Исходные данные: $v = 0,02$ м/с; $R = 0,2$ м; $a = 0,5$ м; $T = 62,8$ с; $r_0 = 0,507$ м. Графики $\phi(t)$ и $r(t)$ изображены на рисунке 3.4.

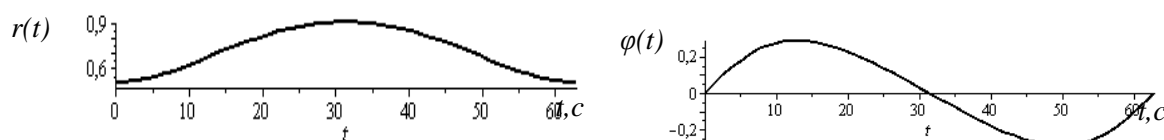


Рисунок 3.4 – Графики полярных координат (при перемещении схвата по окружности)

Графики подтверждают корректность кинематического описания движения телескопической руки при ее вращении из исходного состояния до полного обхода кольца.

Управляющие воздействия для выдвигания и поворота руки вычисляются согласно зависимостям:

$$U_r = (M + mr)a_r, \quad M_p = I \cdot \frac{a_r}{r},$$

где M – масса схвата с грузом; m – распределенная масса (например, движение материала вдоль руки); I – физический момент инерции руки относительно оси вращения $\left(I = \left(M + \frac{ml}{3} \right) \cdot r^2 \right)$. Графики $a_r(t)$ и $a_p(t)$ изображены на Рисунке 3.5.

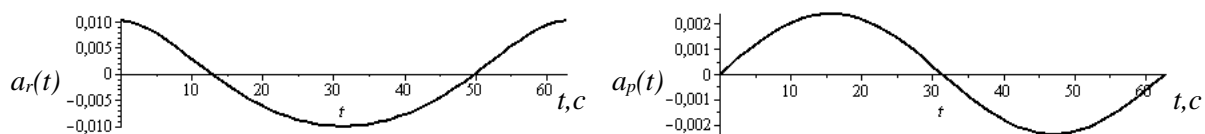


Рисунок 3.5 – Ускорение схвата (в радиальном и тангенциальном направлениях)

Задача 2. Движение схвата с рабочим органом по окружности с использованием манипулятора, работающего в декартовой системе координат.

В произвольный момент времени (рисунок 3.6) координаты точек, принадлежащих кольцу, равны:

$$x = a - R \cdot \sin \frac{vt}{R}, \quad y = a - R \cdot \cos \frac{vt}{R}. \quad (3.3)$$

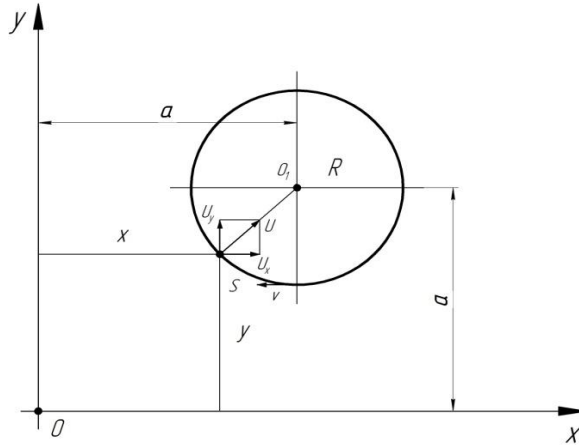


Рисунок 3.6 – Воспроизведение кольца манипулятором (декартовая система координат)

При этом $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = const$, $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \frac{v^2}{R} = const$. Графики $x(t)$ и $y(t)$

изображены на Рисунке 3.7.

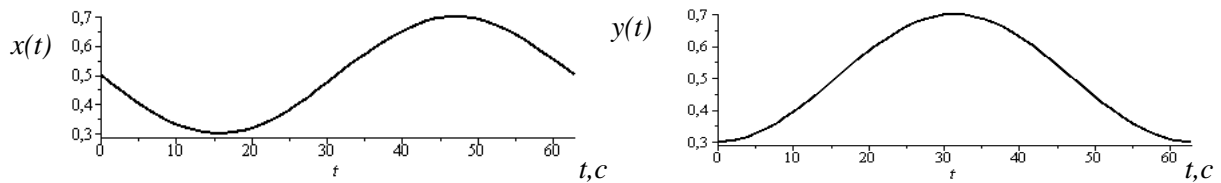


Рисунок 3.7 – Перемещение схвата в декартовой системе координат

Следовательно, в этом случае компоненты управляющих воздействий примут вид:

$$U_x = (M + mL)a_x, \quad U_y = (M + mL)a_y,$$

где L – длина руки манипулятора; $L = const$. Модуль управления равен

$U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2}$; управление в этом случае направлено к центру окружности.

Графики компонентов управления изображены на рисунке 3.8.

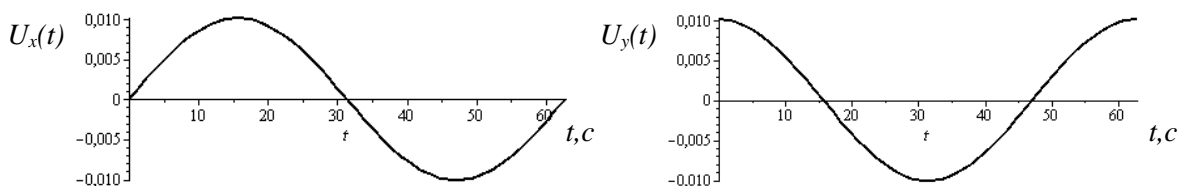


Рисунок 3.8 – Компоненты управлений (движение в декартовой системе координат)

Пример 3. Реализация движения схвата с рабочим органом по отрезку прямой манипулятором, работающим в полярной системе координат.

Предполагается, что движение начинается в точке А по оптимальному закону [26]:

$$S_e = \frac{L_1 t^2}{T^3} (T - 2t), \quad (3.4)$$

где L_1 – общая длина отрезка прямой. Закон движения (3.4) найден [26] из условия

минимизации критерия $\int_0^T U^2 dt$ при условиях $S_e(0) = 0$, $\dot{S}_e(0) = 0$, $S_e(T) = L_1$, $\dot{S}_e(T) = 0$ и

без учёта сопротивления уравнение движения $\frac{d^2 S_e}{dt^2} = U(t)$.

Движения осуществляется по прямой с уравнением $y = k_2 x + b$, которая в точке А пересекается с прямой $y = k_1 x$ (Рисунок 3.9).

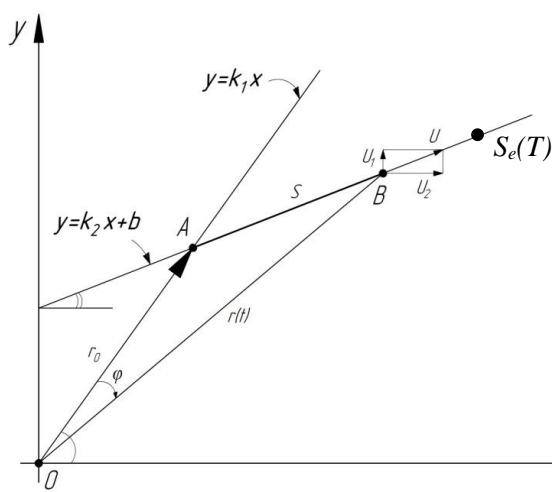


Рисунок 3.9 – Воспроизведение отрезка прямой (полярная система координат)

Начальная длина руки r_0 . Угол пересечения прямых находится согласно известной из аналитической геометрии зависимости

$$\alpha = \arctg \left(\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right). \quad (3.5)$$

Из Рисунка 3.9 следует:

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 + S^2 - 2r_0 \cdot S \cdot \cos(\pi - \alpha)}, \quad \phi(t) = \arcsin \left(S \cdot \frac{\sin(\pi - \alpha)}{r} \right). \quad (3.6)$$

Графики $\phi(t)$ и $r(t)$ изображены на рисунке 3.10, а графики компонент ускорений – на Рисунке 3.11. Управляющие воздействия находятся [70] по аналогии с решением предыдущих задач.

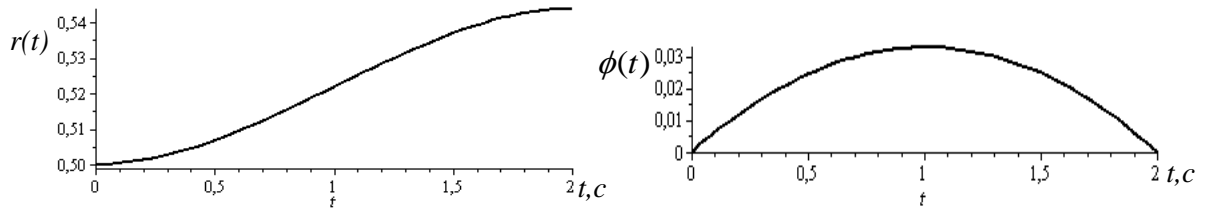


Рисунок 3.10 – Полярные координаты схвата при движении по прямой

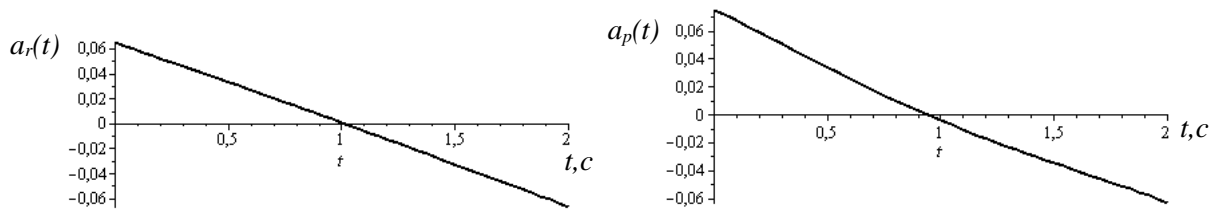


Рисунок 3.11 – Компоненты ускорений схвата при движении по прямой

Создание объекта с использованием 3D-принтеров-манипуляторов может быть основано на реализации алгоритма обратной задачи динамики [1, 3, 41, 42, 71], когда по заданной траектории выясняется кинематика и динамика процесса изготовления изделия. Геометрия объекта диктует выбор варианта его практической реализации с учетом минимизации энергетических затрат и ограничений на термодинамические свойства материала.

3.2. Синтез управления линейным перемещением модуля с экструдером и рабочего стола

Совершенствование динамических свойств мехатронных приводов связано со строгим учетом конечной жесткости ремня, погрешности в задании параметров устройства и помех, возникающих в процессе функционирования, с коррекцией алгоритма синтеза оптимального целенаправленного движения.

Осуществляется моделирование [72] динамического поведения привода как системы с конечным числом степеней свободы при оптимальном ускорении формообразующего узла.

При моделировании приняты допущения: не учитывается распределенная масса ремня и его проскальзывание на шкивах, каретка рассматривается как сосредоточенная масса. В этом случае привод представляет собой систему с тремя степенями свободы (Рисунок 3.12), с координатами: ϕ_1, ϕ_2 — углы поворотов шкивов; x — перемещение каретки.

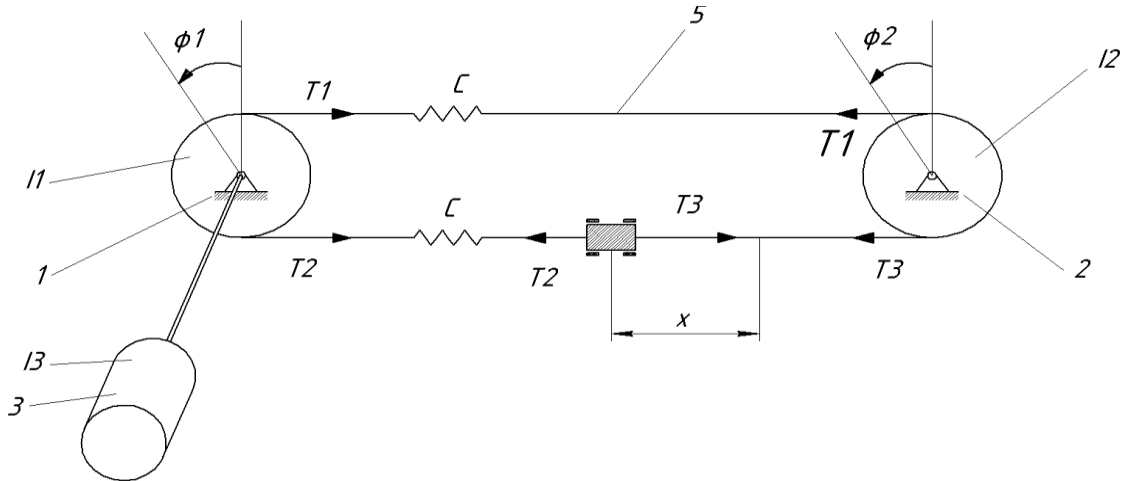


Рисунок 3.12 – Схема привода мехатронного модуля

Дифференциальные уравнения движения составлены на основе общих теорем динамики:

$$I_1 \frac{d^2 \phi_1}{dt^2} = -r(T_1 - T_2) - b_1 \dot{\phi}_1 - rT_0 + M(t) + F_1(t), \quad (3.7)$$

$$I_2 \frac{d^2 \phi_2}{dt^2} = r(T_1 - T_3) - b_2 \dot{\phi}_2 + rT_0, \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = T_3 - T_2 + T_0,$$

где I_1, I_2 – физические моменты инерции шкивов; r – радиусы шкивов; T_1, T_2, T_3 – натяжение ремня на соответствующих участках ($T_1 = c(r\phi_1 - r\phi_2)$, $T_3 = c(x - r\phi_1)$, $T_2 = c(r\phi_2 - x)$); c – коэффициент жесткости ремня (Н/м); b_1, b_2 – коэффициенты линейно-вязкого сопротивления; T_0 – начальное натяжение шкива; $M(t)$ – момент на ведущем валу (управляющее воздействие); $F_1(t)$ – случайная функция.

Предполагается, что движение осуществляется из исходного статического положения равновесия, без учета линейно-вязкого сопротивления. После замен переменных и преобразований система уравнений (3.7) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_5 &= M_1(t) + f_1(t), \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} + a_4 x_1 - a_5 x_3 - a_6 x_5 &= 0, \\ \frac{d^2 x_5}{dt^2} + a_7 x_1 - a_8 x_3 - a_9 x_5 &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\varphi_1 = x_1$; $\varphi_2 = x_3$; $x = x_5$; $a_1 = \frac{2cr^2}{I_1}$; $a_2 = \frac{cr^2}{I_1}$; $a_3 = \frac{cr}{I_1}$; $a_4 = \frac{2cr^2}{I_2}$; $a_5 = \frac{cr^2}{I_2}$; $a_6 = \frac{cr}{I_2}$; $a_7 = \frac{cr}{m}$; $a_8 = \frac{2cr}{m}$; $a_9 = \frac{cr}{m}$; $M_1(t) = \frac{M(t)}{I_1}$; $f_1(t) = \frac{F(t)}{I_1}$.

Если в (3.8) пренебречь моментом инерцией I_2 , т.к. $I_1 \gg I_2$, то уравнения движения для системы с двумя степенями свободы преобразуется к виду:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + d_1 x_1 - d_2 x_2 = M_1(t) + f_1(t); \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} + d_3 x_2 - d_4 x_1 = 0, \quad (3.9)$$

где $x_1 = \varphi_1$; $x_2 = x$; $d_1 = \frac{2Cr^2}{I_1}$; $d_2 = \frac{2Cr}{I_1}$; $d_3 = \frac{2C}{m}$; $d_4 = \frac{2Cr}{m}$.

Частотное уравнение системы (3.9)

$$\omega^4 - \frac{(2cr^2m + 2J_1C) \cdot \omega^2}{I_1 m} = 0, \quad (3.10)$$

из которого $\omega_1 = 0$, $\omega_2 \neq 0$.

Исходные данные: $r = 0,01$ м; $m_1 = 0,01$ кг; $m = 0,5$ кг; $c = 100$ Н/м;

$I_1 = \frac{1}{2} m_1 r^2 + I_d = am_1 r^2$. Для этого случая: $\omega_2 = 49 \text{ с}^{-1}$ и период $T_2 = 2\pi / \omega_2 = 0,13$ с. В

качестве целенаправленного ускорения (управления) принят простейший [15], с ускорением каретки при ее перемещении из исходного в конечное состояние покоя:

$$U_c(t) = \frac{6L}{T^3}(T-t), \quad (3.11)$$

где L – максимальное перемещение каретки за время движения T . Следовательно, ускорение шкива l равно: $\varepsilon_c(t) = U_c(t) / r$.

Общее время движения T выбрано из условий равенства нулю скоростей в этот момент времени: $\dot{\varphi}_1(T) = 0$, $\dot{x}(T) = 0$ и $x(T) = L$, $T = 0,315$ с.

Ниже приведен результат численного интегрирования в Mathcad системы уравнений (3.9) при условиях: $L = 0,09$ м, $M_1(t) = \varepsilon_c(t)$, $f_1(t) = 0$.

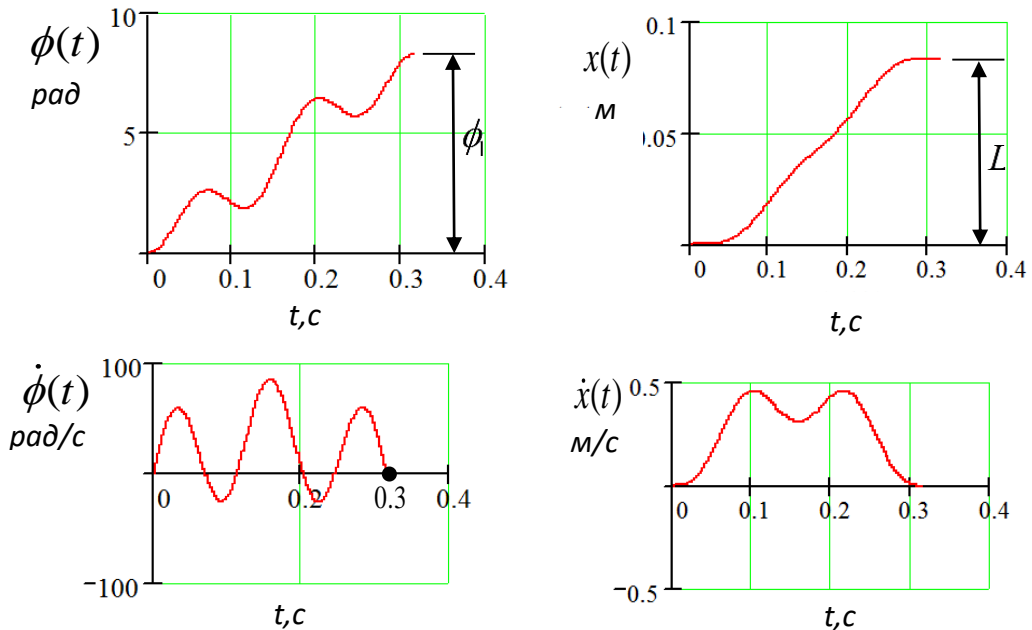


Рисунок 3.13 – Результаты численного интегрирования системы уравнения (3.9)

Из графиков следует, что в момент времени $t=T$ скорости равны нулю ($\dot{\phi}_1(T) = z^{(2)} = 0$ и $\dot{x}(T) = z^{(4)} = 0$), т.е. достигается конечное состояние покоя. Интересно, что точное аналитическое решение системы (3.9), полученное с использованием оператора *dsolve* в Maple, с высокой точностью совпадает с результатом численного интегрирования в MathCad.

При определении управлений для подавления колебаний внутри интервала движения ($T \geq t \geq 0$) не исключается использование линейного регулятора с квадратичным критерием оптимальности [15,73]:

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^T Q x + x^T N u + u^T R u),$$

$$\text{где } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = 0, \quad R = 1, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & a_4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для реализации алгоритма принято: $a_1 = 2000$, $a_2 = -2 \cdot 10^5$, $a_3 = 400$, $a_4 = -4$.
Матрица обратных связей ПКР найдена с использованием «Control System Toolbox», функция $[K, S, e] = \text{lg}r(A, B, Q, R, N)$.

Получено: $K_{11} = 37,733$; $K_{12} = 1,115$, $K_{22} = 631,2562$. Матрица K определена положительно, т.к. $K_{12} > 0$, $K_{22} > 0$.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & a_5 & 0 & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_7 & 0 & a_8 & 0 & a_9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_7 = \frac{rc}{m} = 2.0$$

$$a_8 = \frac{rc}{m} = 2.0$$

$$a_9 = -\frac{2c}{m} = -400$$

$$R = 1 \quad N = 0$$

$$a_1 = -\frac{2r^2c}{I_1} = -2000.0$$

$$a_2 = \frac{r^2c}{I_1} = 1000.0$$

$$a_3 = \frac{rc}{I_1} = 100000.0$$

$$a_4 = \frac{r^2c}{I_2} = 20000.0$$

$$a_5 = -\frac{2r^2c}{I_2} = -40000.0$$

$$a_6 = \frac{rc}{I_2} = 2.0 \cdot 10^6$$

Для контроля решалась система уравнений Риккати (без привлечения Matlab) [46]. В Maple система уравнений компактно записывается в виде:
 $S := \text{evalm}(P \& * A + \text{transpose}(A) \& * P - P \& * B \& * \text{transpose}(B) \& * P + Q = 0$.

Для поиска корней использована функция *fsolve*, после определения всех корней выбирались те, которые удовлетворяли критерию устойчивости Сильвестра.

Схема реализации комбинированного управления приведена на Рисунке 3.14 (Simulink).

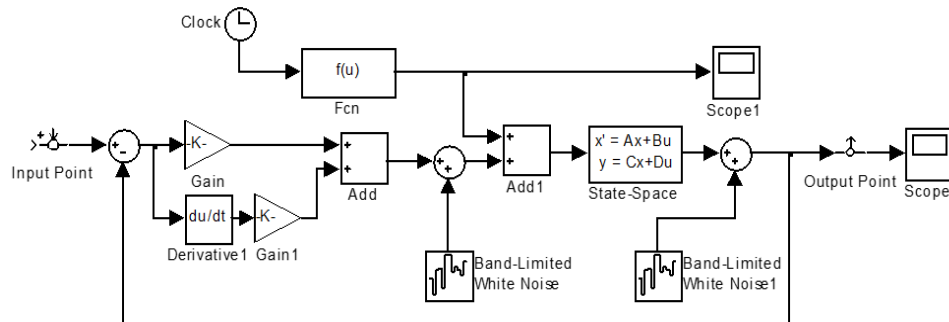


Рисунок 3.14 – Схема мехатронного модуля с комбинированным оптимальным управлением

Коэффициенты ПД-регулятора обеспечили существенное снижение случайных возмущений на динамику мехатронного модуля.

3.3 Реализация телескопическим манипулятором оптимального линейного перемещения печатающей головки

С использованием телескопической руки манипулятора (в сферической системе координат) реализовано оптимальное транспортирование печатающей головки по траектории в виде отрезка прямой в пространстве. Для реверсионно сконструированного оптимального ускорения при его непосредственном приложении к объекту с привлечением алгоритма решения обратной задачи динамики найдены усилия в приводах.

В интенсивно развивающихся современных технологиях, где используются манипуляторы, реализующие 3D-печать, необходимо решение актуальной задачи – поиска оптимальных ускорений исполнительных органов для воспроизведения рабочих траекторий при создании широкого ассортимента изделий.

Методам оптимального управления системами посвящены работы [15, 26, 30, 37, 71] и другие.

Реверсионное конструирование целенаправленного движения [1, 16, 42, 46, 74] может приводить к некоторому снижению энергетических затрат на транспортирование объектов. В результате конструирования появляются функционалы-критерии, отличающиеся от обычно применяемых в ряде типовых задач синтеза оптимальных ускорений (управлений) с использованием вариационного метода теории оптимального управления.

На Рисунке 3.15 изображена траектория движения объекта в виде отрезка прямой AB в декартовой системе координат. Телескопический манипулятор должен реализовать оптимальное движение при изменении координат руки в сферической системе соответственно движению схвата с печатающей головкой по заданному отрезку прямой.

На основании алгоритма обратной задачи динамики необходимо определить усилия в приводах телескопического манипулятора, работающего в сферической системе координат, для воспроизведения оптимального движения печатающей головки по траектории в виде прямой в пространстве (в декартовой системе координат) [75].

Траектория, по которой оптимально перемещается печатающая головка, – прямая линия в пространстве. Уравнение прямой, проходящей через две точки [76], записывается в канонической форме:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}, \quad (3.12)$$

где $x_2 - x_1 = m$, $y_2 - y_1 = n$, $z_2 - z_1 = p$.

Направляющие косинусы прямой AB определяются так:

$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \quad \cos \beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (3.13)$$

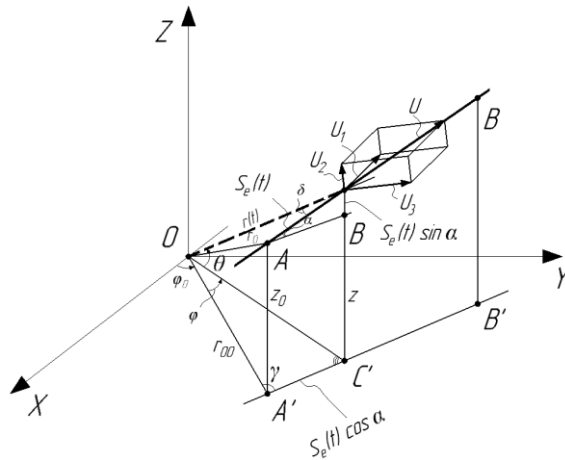


Рисунок 3.15 – Перемещение печатающей головки по прямой AB в пространстве с использованием руки манипулятора (сферическая система координат)

В произвольный момент времени косинус угла между прямой ($r(t)$ – длина телескопической руки) и траекторией AB , по которой движется печатающая головка, находится по формуле:

$$\cos \delta = \frac{mm_1 + nn_1 + pp_1}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}}, \quad (3.14)$$

где m_1, n_1, p_1 – параметры прямой $r(t)$.

При определении координат φ, θ, r сферической системы в зависимости от пройденного пути по отрезку прямой общего положения, как функций времени, не исключается достаточно простой способ. Для движения по отрезку прямой используется управление (ускорение), сконструированное на основании реверсионного принципа оптимальности (РПО) [30, 37, 71] в соответствие с целью движения, свойствами кососимметричного управления (ускорения) и ограничениями:

$$\begin{aligned} S_e(t) &= \frac{Lt^2}{T^5} (5T^3 - 10tT^2 + 10t^2T - 4t^3), \\ V_e(t) &= \frac{10Lt}{T^3} (T-t)(2t^2 - 2tT + T^2), \\ U_e(t) &= \frac{10L}{T^5} (T-2t)^3. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Здесь L – общее перемещение по прямой; T – общее время движения. Ускорение $U_e(t)$ является решением дифференциального уравнения Эйлера

$$\frac{d^4 U_e}{dt^4} = 0, \quad (3.16)$$

как необходимого условия экстремума восстановленного реверсионно функционала-критерия $J = \int_0^T \dot{U}_e dt$.

В качестве исходных данных приняты параметры: $z_0, r_{oo}, \gamma, \alpha$, и $A'C' = S_e(t) \cdot \cos \alpha$. Из треугольника $\Delta OA'C'$ согласно теореме синусов (Рисунок 3.15) следует выражение:

$$\frac{\sin \varphi}{S_e \cos \alpha} = \frac{\sin [\pi - (\varphi + \gamma)]}{r_{oo}}. \quad (3.17)$$

После преобразований, для угла поворота получено:

$$\varphi(t) = \arccot \left(\frac{r_{oo}}{S_e \cos \alpha \cdot \sin \gamma} - \operatorname{tg} \gamma \right). \quad (3.18)$$

Координата точки B в произвольный момент времени равна:

$$z(t) = z_0 + S_e \sin \alpha. \quad (3.19)$$

Из $\Delta OA'C'$ согласно теореме косинусов следует:

$$OC' = \sqrt{r_{oo}^2 + (S_e \cos \alpha)^2 - 2r_{oo} \cdot S_e \cos \alpha \cdot \cos \gamma}. \quad (3.20)$$

Поэтому угол поворота равен

$$\theta(t) = \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{OC'} \right), \quad (3.21)$$

а длина руки в произвольный момент времени

$$r(t) = \sqrt{z^2 + (OC')^2}. \quad (3.22)$$

Графики кинематических параметров движения руки изображены на Рисунке 3.16; они построены для исходных данных: $L=0,3$ м; $T=2$ с; $r_{00}=0,5$ м; $\gamma=\pi/3$; $\alpha=\pi/6$.

Начальная длина руки телескопического манипулятора равна $r_0 = \sqrt{r_{00}^2 + z_0^2} = 0,71$ м.

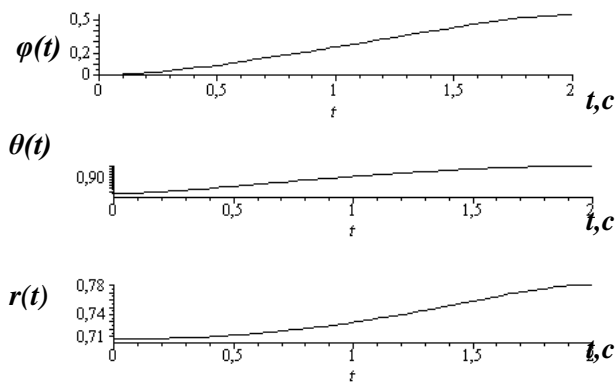


Рисунок 3.16 – Графики сферических координат

Интересно, что при $t=T$ скорости равны нулю $\dot{\varphi}(T)=0$, $\dot{\theta}(T)=0$ и $\dot{r}(T)=0$, т.е., как и следовало ожидать, при $S_e(T)=L$ в конечном состоянии наступает покой схвата с грузом.

Усилия в приводах найдены в результате решения обратной задачи динамики [1] – при известных геометрических свойствах оптимального движения и физических параметрах руки усилия в приводах – обобщенные силы, находятся из уравнений Лагранжа второго рода:

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= M_1 = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \\ Q_\theta &= M_2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta}, \\ F &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где T – кинетическая энергия руки вместе с перемещаемым объектом в произвольный момент времени.

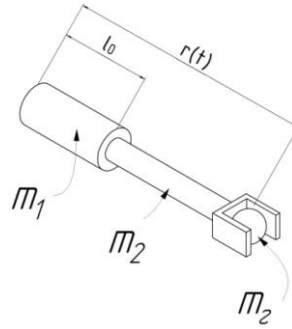


Рисунок 3.17 – Схема руки телескопического манипулятора

Выражение для кинетической энергии руки (Рисунок 3.17) вместе с перемещаемым объектом в обобщенных сферических координатах и скоростях имеет вид:

$$T = \frac{1}{6} m_1 l_0^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 (r(t) \cdot \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{8} m_2 (l_0 + r(t))^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6} m_1 l_0^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 (r(t) \cdot \dot{\theta})^2 + \frac{1}{8} m_2 (l_0 + r(t))^2 \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (m_2 + m_2) \cdot (\dot{r}(t))^2, \quad (3.24)$$

где m_1 , m_2 – массы элементов телескопической руки, приведенные к сосредоточенным; m_2 – масса перемещаемой печатающей головки; l_0 – длина неизменяющейся части руки.

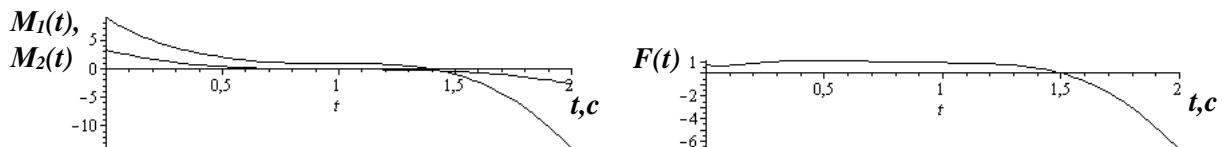
Согласно (3.23), после преобразований, получены выражения для усилий в приводах, реализующие оптимальное движение печатающей головки по заданной траектории:

$$M_1(t) = \frac{1}{3} m_1 l_0^2 \ddot{\varphi} + 2m_2 r(t) \cdot \dot{r}(t) \cdot \dot{\varphi} + m_2 (r(t))^2 \cdot \ddot{\varphi} + m_2 (l_0 + r) \dot{r} \dot{\varphi} + m_2 \frac{(r + l_0)^2}{4} \cdot \ddot{\varphi},$$

$$M_2(t) = \frac{1}{3} m_1 l_0^2 \ddot{\theta} + 2m_2 r(t) \cdot \dot{r}(t) \cdot \dot{\theta} + m_2 (r(t))^2 \cdot \ddot{\theta} + m_2 (l_0 + r) \dot{r} \dot{\theta} + m_2 \frac{(r + l_0)^2}{4} \cdot \ddot{\theta}, \quad (3.25)$$

$$F = (m_2 + m_2) \cdot \ddot{r}(t).$$

При построении графиков, изображенных на Рисунке 3.18, использовались следующие исходные данные: $m_1=5$ кг; $m_2=8$ кг; $m_2=8$ кг; $l_0=0,6$ м.

Рисунок 3.18 – Графики усилий $M_1(t)$, $M_2(t)$, $F(t)$ в приводах

Усилия в приводах подтверждают требуемый проектируемый характер оптимального движения печатающей головки – разгон из исходного состояния

покоя в конечное состояние покоя.

При этом, $U_e(t) = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}$, где U_1, U_2, U_3 – ускорения (управления), прикладываемые непосредственно к центру масс печатающей головки.

Алгоритм обратной задачи динамики для поиска управлений в виде усилий в приводах справедлив для любого типа манипуляторов и произвольных рабочих траекторий оптимального перемещения печатающей головки.

На этапе выбора типов приводов возможно уточнение усилий в приводах при учете сопротивлений движению (линейно-вязкого, сухого трения). Для повышения точности позиционирования без снижения производительности предполагается учет конечной жесткости элементов руки манипулятора с уточнением в этой связи общего времени оптимального движения для достижения абсолютного покоя (отсутствия упругих колебаний) в конечном состоянии.

При транспортировании за минимально возможное время нежестких объектов манипуляторами конечной жесткости возникают сложные колебания манипуляторов и транспортируемых объектов. Поэтому актуальны исследования оптимальных управлений перемещением объектов манипуляторами с устранением их колебаний в конце движения (без потери точности позиционирования и производительности).

3.4 Ускорение манипулятора с упругой рукой

В цилиндрической системе координат исследованы целенаправленные оптимальные ускорения поступательного и вращательного движения упругой руки манипулятора с печатающей головкой, найденные с привлечением реверсионного принципа оптимальности (РПО). С использованием моментных соотношений в относительном движении упругой руки (колебаний руки) определялось минимально возможное время для достижения абсолютного покоя центра масс печатающей головки в конечном положении руки.

Актуальной задачей проектирования манипуляторов продолжает оставаться задача повышения его производительности (сокращения времени

транспортирования объектов) без потери точности позиционирования. Если звенья манипулятора обладают конечной жесткостью, то, как известно, их быстрые поступательные и вращательные движения порождают колебания, обусловленные деформированием упругих звеньев. В работе [3] исследованы такие оптимальные движения упругих объектов, для которых исключаются их колебания при достижении конечной цели. В работе [1] исследована динамика манипулятора с конечным числом степеней свободы при использовании оптимальных управлений

(ускорений) в виде $U_e(t) = \frac{Lp^2}{2\pi} \sin(pt)$ – для поступательного движения и

$U_\varphi(t) = \frac{\varphi_1 p^2}{2\pi} \sin(pt)$ – для вращательного движения.

Как показано в работах [1, 41, 42, 46, 73], существует достаточно широкий класс кососимметричных оптимальных управлений, позволяющих быстро перемещать упругие объекты (разгон, торможение, разгон-торможение) с достижением относительного либо абсолютного покоя. Важным свойством проектируемого манипулятора должно быть обеспечение возможности совмещения движений звеньев – поступательных и вращательных.

Анализируются оптимальные отдельные и совмещенные движения упругой руки манипулятора с использованием управления, сконструированного согласно РПО.

Реализация управлений манипулятором с упругой рукой иллюстрируется на примере модели, которая рассмотрена в работе [73].

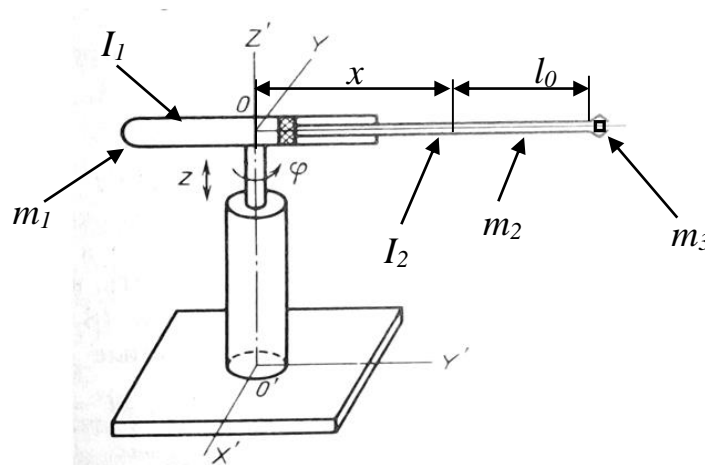


Рисунок 3.19 – Манипулятор с тремя степенями свободы

Для манипулятора с тремя степенями свободы (рисунок 3.19) движение описывается дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2 + m_3) \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_1(t), \\ \frac{d}{dt} \left[(I_1 + I_2 + m_2 x^2 + m_3 (x + l_0)^2) \dot{\varphi} \right] &= M(t), \\ (m_2 + m_3) \frac{d^2 x}{dt^2} - \dot{\varphi}^2 [x(m_2 + m_3) + m_2 l_0] &= F_2(t), \end{aligned} \quad (3.26)$$

где m_1 – суммарная масса вала и направляющей, кг; m_2 – масса выдвигающейся части руки, обладающей конечной жесткостью, кг; m_3 – масса печатающей головки, кг; I_1 – суммарный момент инерции вала и направляющей относительно оси вращения, кг·м²; I_2 – момент инерции выдвигающейся части руки относительно собственной оси, проходящей через ее центр масс, кг·м²; x – расстояние от оси вращения руки до центра масс выдвигающейся телескопической части, м; z – высота подъема руки, м; l_0 – расстояние от оси вращения до центра масс печатающей головки, м.

Управления (ускорения) поступательного и вращательного движений конструировались согласно алгоритму: задание линейных (либо угловых) функций перемещений в виде полиномов (с учетом кривой симметрии управлений, краевых условий и цели движения); факторизация полинома, восстановление уравнения Эйлера-Пуассона и функционала-критерия, который принимает стационарное значение. Для упругой системы выбор времени движения осуществлялся из множества общих корней системы трансцендентных уравнений, в которые превращаются моментные соотношения ($x_r(T) = 0, \dot{x}_r(T) = 0$) [77].

Ускорение (управление) при оптимальном поступательном переносном движении задается полиномом

$$U_e(t) = \sum_{i=1}^5 C_i t^{i-1} \quad (3.27)$$

с условиями: при $t = 0, U_e(0) = a; t = T, U_e(T) = -a, S_e(T) = L,$

$$\int_0^{T/2} U_e(t) dt + \int_{T/2}^T U_e(t) dt = 0; \quad \text{при } t = T/2, U_e(T/2) = 0, \dot{U}_e(T/2) = 0. \quad (3.28)$$

После факторизации, полином (3.27) принимает вид

$$U_e(t) = \frac{a(T-2t)^3}{T^5}, \quad (3.29)$$

где $a = \frac{10L}{T^2}$. Интегрируя выражение (3.29) с учетом начальных условий ($S_e(0) = 0$,

$V_e(0) = 0$ – движение из состояния покоя), получим:

$$S_e(t) = \frac{at^2}{10T^3}(-4t^3 + 10t^2T - 10Tt^2 + 5T^3), \quad V_e(t) = \frac{at}{T^3}(T-t)(2t^2 - 2tT + T^2), \quad (3.30)$$

где L – максимальное перемещение руки (по оси Z).

При оптимальном вращении руки принято управление (угловое ускорение) по аналогии с поступательным оптимальным движением:

$$\varepsilon_e(t) = \frac{\varepsilon_0(T-2t)^3}{T^3}, \quad (3.31)$$

где максимальное значение углового ускорения $\varepsilon_0 = \frac{10\varphi_1}{T^2}$. В обоих случаях при раздельном либо совмещенном движениях дифференциальное уравнение изгибных колебаний руки (как упругой системы с сосредоточенной массой) в относительном движении

$$\frac{d^2x_r}{dt^2} + k^2x_r = -U_e, \quad (3.32)$$

где k – частота собственных колебаний. При использовании моментных соотношений ($x_r(T) = 0, \dot{x}_r(T) = 0$), после ряда преобразований в случае вращательного и поступательного движений получена система трансцендентных уравнений, которая инвариантна к рассмотренным видам движения.

Принято $n = \frac{T}{T_1}, T_1 = \frac{2\pi}{k}, T = \frac{2\pi n}{k}$, где n – подлежащая определению константа.

Моментные соотношения образуют систему трансцендентных уравнений:

$$\begin{aligned} 3(2 - \pi^2 n^2) \cdot \sin(2\pi n) + \pi n(\pi^2 n^2 - 6) \cdot \cos(2\pi n) + \pi^3 n^3 - 6\pi n &= 0, \\ 3(2 - \pi^2 n^2) \cdot \cos(2\pi n) + \pi n(6 - \pi^2 n^2) + 3\pi^2 n^2 - 6 &= 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

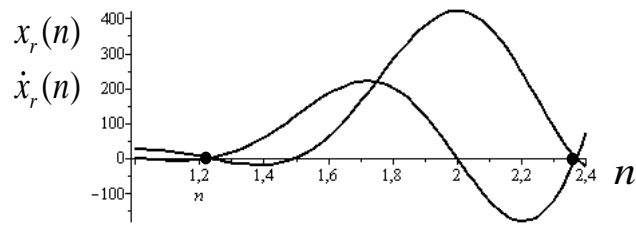


Рисунок 3.20 – Графики $x_r(n)$, $\dot{x}_r(n)$ (два общих корня)

Два общих корня указаны на графике, рисунок 3.20. Наименьший корень $n=1.231935$ найден графически (Рисунок 3.21) в интервале $1.23192 < n < 1.23196$. При $k=4\pi \text{ c}^{-1}$ общее время движения $T=0,616 \text{ с}$.

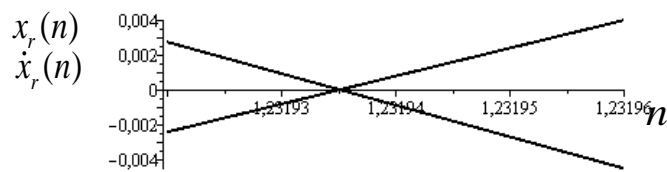


Рисунок 3.21 – Графическое уточнение общего корня

Графики переносного движения $U_e(t)$, $V_e(t)$, $S_e(t)$ изображены на Рисунке 3.22, а относительного движения $x_r(t)$, $\dot{x}_r(t)$ – на Рисунке 3.23.

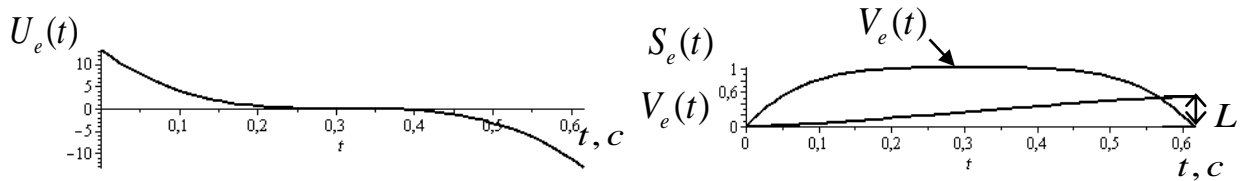


Рисунок 3.22 – Графики переносного движения $S_e(t)$, $V_e(t)$, $U_e(t)$

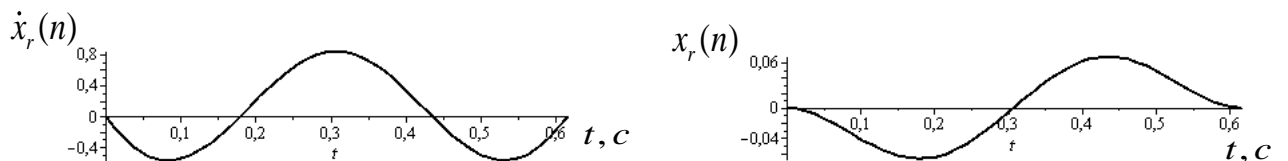


Рисунок 3.23 – Графики относительного движения $x_r(t)$, $\dot{x}_r(t)$

Из графиков следует, что при перемещении на $L=0,5\text{м}$ наступает абсолютный покой как суперпозиция переносного и относительного покоя. Изгибные колебания данной упрощенной модели руки при переносном поступательном и вращательном движениях практически не отличаются.

При известных законах оптимального управления из системы дифференциальных уравнений (3.26) находятся усилия в приводах, которые обеспечивают реализацию таких движений.

Преимущество реверсионно сконструированного ускорения (3.29) видно в сравнении с известным управлением, полученным традиционно вариационным методом теории оптимального управления. В [37] для критерия $\int_0^T U^2 dt$,

дифференциального уравнения управляемого движения $\frac{d^2 S}{dt^2} = U(t)$ вариационным методом найдено ускорение (управление), скорость и перемещение:

$$U_e(t) = \frac{6L}{T^3}(T-2t), \quad V_e(t) = \frac{6Lt}{T^3}(T-t), \quad S_e(t) = \frac{Lt^2}{T^3} \left(3 - \frac{2t}{T} \right). \quad (3.34)$$

Два типа управления далее сравниваются по критериям: норма мощности, энергия, затраченная на управление, принцип действия в форме Лагранжа (для случая $m=1$ кг). В случае управления (3.29) получено:

$$J_1 = \int_0^T U_e^2 dt = 14,286 \frac{L^2}{T^3}; \quad J_2 = 2 \int_0^T U_e V_e dt = 1,56 \frac{L^2}{T^2}; \quad J_3 = \int_0^T V_e^2 dt = 1,111 \frac{L^2}{T}.$$

Для управления (23) значения этих критериев:

$$J_1 = \int_0^T U^2 dt = 12 \frac{L^2}{T^3}; \quad J_2 = 2 \int_0^T U V dt = 2,25 \frac{L^2}{T^2}; \quad J_3 = \int_0^T V^2 dt = 1,2 \frac{L^2}{T}.$$

Несовершенство критерия нормы мощности $\int_0^T U^2 dt$ подтверждается снижением энергозатрат на реализацию управления (ускорения), полученного с использованием РПО (более чем на 30%). Интересно, что в этом случае значение критерия действия (по Лагранжу) уменьшаются. Итак, при практической реализации движения типа «разгон-торможение» следует отдавать предпочтение управлению (управлению), полученному на основании РПО.

Учет линейно-вязкого сопротивления приводит к некоторым погрешностям в достижении абсолютного покоя при оптимальном транспортировании объектов манипуляторами с упругими звеньями.

В случае совмещения вращательного и поступательного движений с выдвиганием руки не исключается возможность использования приемов стабилизации жесткости для обеспечения постоянства частоты первого тона изгибных колебаний.

Сконструированные управления (ускорения) перемещением упругих звеньев манипулятора позволяют за минимально возможное время достичь в конце движения состояния абсолютного покоя центра масс печатающей головки при снижении энергоемкости оптимального управления; таким образом, открывается возможность повышения производительности технологического производственного процесса с участием манипуляторов минимальной массы (со звеньями конечной жесткости).

После определения кинематических условий оптимальных движений руки управления в приводах находятся согласно алгоритму обратных задач динамики.

Выводы по разделу

Выполнен анализ кинематики и динамики поведения функциональных элементов объектов с упругими элементами в ходе реализации формообразующих перемещений, осуществляемых в декартовой и полярной системах координат.

Обоснована необходимость учета геометрических и физических параметров создаваемого объекта при задании траектории движения и выборе конструкции формообразующего устройства в связи с требованиями минимизации энергетических затрат на реализацию траекторий. Предложены алгоритмы синтеза оптимальных ускорений элементами систем с конечным числом степеней свободы при поступательном и вращательном движениях.

Сконструированы целенаправленные движения для перемещения упругих звеньев телескопического манипулятора, определены усилия в приводах для реализации таких движений.

ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОГО ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОНСОЛЬНОГО ОБЪЕКТА КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Теории колебаний упругих систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы посвящены работы [8-10, 12, 30, 78, 79] и другие. Методы оптимального управления колебаниями систем с сосредоточенными и распределёнными параметрами отражены в работах [12, 30, 79], в которых при поиске управлений колебаниями деформируемых систем применялся метод моментов.

В [3, 41, 46] представлены результаты найденного широкого класса кососимметричных оптимальных управлений переносным движением упруго-деформируемых систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы, а также приводятся примеры характерных технических приложений. Решению задач оптимального переносного движения с использованием алгоритма полной обратной задачи вариационного исчисления («реверсионное исчисление») посвящены, например, работы [1, 3, 42, 73, 80].

Обобщением алгоритма решений полной обратной задачи вариационного исчисления (от функции к функционалу) является РПО [1], согласно которому восстановленный в процессе конструирования движения функционал-критерий за минимально возможное время, определяемое из моментных соотношений в относительном движении упругой системы, принимает стационарное значение (минимум).

Экспериментальная проверка оптимального переносного поступательного перемещения упругой системы с одной степенью свободы впервые выполнена в [80] с использованием оборудования лаборатории FESTO-СевГУ (г. Севастополь).

Цель эксперимента – использование разработанной и усовершенствованной методики экспериментальных исследований переносного поступательного движения упругого объекта для проверки оптимального переносного вращательного движения консольного упругого стержня с распределённой массой.

4.1. Синтез оптимального управления вращением вокруг неподвижной оси объекта конечной жесткости

По аналогии с оптимальным поступательным движением [3] ускорение переносного вращательного движения принято в виде:

$$\varepsilon_e(t) = a \cdot \sin(pt), \quad (4.1)$$

где $a, p = \text{const}$. Заданы краевые условия:

$$\varphi_e(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_e(0) = 0, \quad \varphi_e(T) = \varphi_*, \quad \dot{\varphi}_e(T) = 0, \quad (4.2)$$

где T – общее время переносного вращательного движения; φ_* – максимальный угол поворота стержня к концу движения. После интегрирования (4.1) с учетом краевых условий (4.2) получены выражения для угловой скорости и угла поворота:

$$\omega_e(t) = \frac{a}{p} \cdot (1 - \cos pt), \quad \varphi_e(t) = \frac{a}{p} \cdot \left(t - \frac{1}{p} \sin pt \right), \quad (4.3)$$

где $a = \frac{\varphi_* p^2}{2\pi}$. При повороте стержня на угол φ_* за время T наступает переносный покой [74, 81].

В относительном движении в интервале $T \geq t \geq 0$ наблюдаются изгибные колебания упругого стержня, обусловленные переносным вращательным движением, которые без учёта сопротивления движению описываются уравнением математической физики:

$$EJ \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} = -f(x, t), \quad (4.4)$$

где EJ – изгибная жёсткость стержня (E – модель упругости первого рода; J – осевой момент инерции поперечного сечения стержня); m – распределённая масса (кг/м); $f(x, t) = \varepsilon_e(t) \cdot x \cdot m$, где угловое ускорение $\varepsilon_e(t) = \frac{\varphi_* p^2}{2\pi} \sin(pt)$.

Предполагается, что в эксперименте наиболее вероятно появление первой формы (моды) изгибных колебаний упругого стержня. Согласно методу Фурье [8],

[10] с учетом первой моды вынужденных изгибных колебаний для перемещений принято:

$$W_1(x, t) = W_1(x) \cdot \sin(pt). \quad (4.5)$$

После постановки (4.5) в (4.4) и преобразований получено дифференциальное уравнение четвёртого порядка для первой моды колебаний:

$$\frac{d^4 W_1(x)}{dx^4} - k^4 W_1(x) = -\frac{\phi_* p^2 mx}{2\pi \cdot EJ}, \quad (4.6)$$

где $k^4 = \frac{mp^2}{EJ}$. Решение неоднородного уравнения (4.6) найдено с использованием функций А.Н. Крылова. Общее решение уравнения (4.6) записывается так:

$$W_1(x) = A \cdot s(x) + B \cdot T(x) + C \cdot U(x) + D \cdot v(x) + \frac{\phi_* p^2 mx}{2\pi \cdot k^4 EJ}, \quad (4.7)$$

где

$$s(x) = \frac{\cosh(kx) + \cos(kx)}{2}; \quad T(x) = \frac{\sinh(kx) + \sin(kx)}{2};$$

$$U(x) = \frac{\cosh(kx) - \cos(kx)}{2}; \quad V(x) = \frac{\sinh(kx) - \sin(kx)}{2}.$$

С учётом краевых условий для стержня с жёстким защемлением и свободным концом

$$W_1(0) = 0, \quad W_1'(0) = 0, \quad W_1''(L) = 0, \quad W_1'''(L) = 0, \quad (4.8)$$

после определения констант A, B, C, D решение уравнения (4.6) приводится к виду:

$$W(x) = -\frac{1}{4k^5} \frac{1}{(1 + \cosh(kL) \cdot \cos(kL))\pi EJ} \cdot (fp^2 m(-2kx \cdot \cosh(kL) \cdot \cos(kL) +$$

$$+ \sin(kx) \cdot \cosh(kL) \cdot \cos(kL) + \sinh(kx) \cdot \cosh(kL) \cdot \cos(kL) -$$

$$- \cos(kL) \cdot \sinh(kL) \cdot \cosh(kx) + \cos(kL) \cdot \sinh(kL) \cdot \cos(kx) +$$

$$+ \cosh(kL) \cdot \sin(kL) \cdot \cosh(kx) - \cosh(kL) \cdot \sin(kL) \cdot \cos(kx) -$$

$$- \sinh(kL) \cdot \sin(kL) \cdot \sinh(kx) + \sinh(kL) \cdot \sin(kL) \cdot \sin(kx) - 2kx + \sinh(kx)) \quad (4.9)$$

где задано $f = \frac{\pi}{4}$.

Для численного анализа с последующей экспериментальной проверкой приняты следующие исходные данные: удельный вес материала $\gamma = 7800 \text{ кг/м}^3$; модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; диаметр стержня $d = 0,55 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; длина стержня $L = 1 \text{ м}$.

С учетом исходных данных, решение записывается так:

$$W(x) = -0.001262134811 \cdot \sinh(1.570796327x) - \\ -0.001262134811 \cdot \sin(1.570796327x) + 0.001376145229 \cdot \cosh(1.570796327x) - \\ -0.001376145229 \cdot \cos(1.570796327x) + 0.003965113454x,$$

Вычисленные величины: $m = \gamma \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 0,1853 \text{ кг/м}$, $J = \frac{\pi d^4}{64} = 0,1853 \text{ м}^4$.

Частота первого тона колебаний согласно [8] равна: $\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 25.08 \text{ с}^{-1}$, где для первой моды принято $\lambda_1 = 1,875$.

Период первого тона колебаний: $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \approx 0.25 \text{ с}$; далее принято

$$p = \frac{\omega_1}{2} = 12.54 \text{ с}^{-1}; \text{ поэтому в данном случае общее время движения } T = \frac{2\pi}{p} = 0.5 \text{ с}.$$

График функции $W_1(x,t) = W_1(x) \cdot \sin(pt)$ при $T \geq t \geq 0$ изображен на Рисунке 4.1.

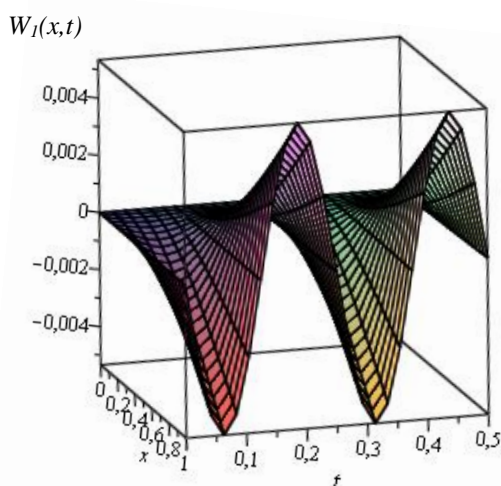


Рисунок 4.1 – Колебания стержня в относительном движении

Как следует из Рисунка 4.1, в момент времени $t = T$ наступает относительный покой, а с учетом переносного покоя (Рисунок 4.2) достигается абсолютный покой.

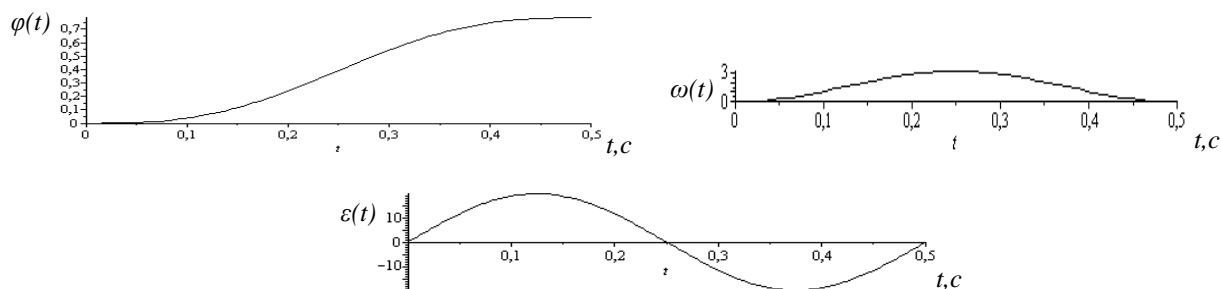


Рисунок 4.2 – Графики угла поворота, угловой скорости, углового ускорения (в переносном движении)

4.2. Определение частоты и периода собственных колебаний системы с распределенной массой

Период первого тона колебаний найден для жестко закрепленного стержня длины $l_{cm}=100$ см и диаметра $d_{cm}=5,5$ мм. Он также определен экспериментально при помощи акселерометра MPU 6050, подключенного через Arduino MEGA 2560 к ПК.

Согласно расчетам $\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 25.08 \text{ с}^{-1}$, период первого тона колебаний:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \approx 0.25 \text{ с}, p = \frac{\omega_1}{2} = 12.54 \text{ с}^{-1}; \text{ поэтому общее время движения } T = \frac{2\pi}{p} = 0.5 \text{ с}.$$

Стержень жестко закреплен, измерялись его свободные колебания от единичного воздействия. Данные измерений сведены в Таблицу 4.1.

Таблица 4.1 – Значения экспериментального периода собственных колебаний стержня

№ опыта	Период собственных колебаний, T_i , с	Оценка мат. ожидания периода, T_1'	Оценка дисперсии, D_T	Стандартное отклонение, σ_T
1	0,29	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{li} =$ 0,29881	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (T_{li} - T_1')^2 =$ 0,00001494	$\sqrt{D_T} =$ 0,003865
2	0,30			
3	0,30			
4	0,2979			
5	0,3029			
6	0,3032			
7	0,2998			
8	0,295			
9	0,2993			
10	0,3			

На основании полученных результатов принято экспериментальное значение периода собственных колебаний $T_1=0,29881$ с, $\omega = \frac{2\pi}{T_1} = 21,027 \cdot \text{с}^{-1}$,

$p = \frac{\omega}{2} = 10,51367977 \text{ с}^{-1}$, общее время движения $T = \frac{2\pi}{p} = 0,59762$ с, $a=13,81718278$.

Выражение для углового ускорения $\varepsilon_e(t) = 13,81718278 \cdot \sin(10,51367977 \cdot t)$.

4.3. Проектирование упругого объекта для исследования оптимального переносного вращательного движения вокруг неподвижной оси

При практической проверке закона вращения упругого объекта с достижением высокой точности абсолютного покоя в конце движения возникает необходимость в проектировании объекта со строго заданной частотой первого тона. На Рисунке 4.3 представлены два возможных варианта [82] реализации вращательного движения объекта в виде консольного упругого стержня с сосредоточенной массой на конце.

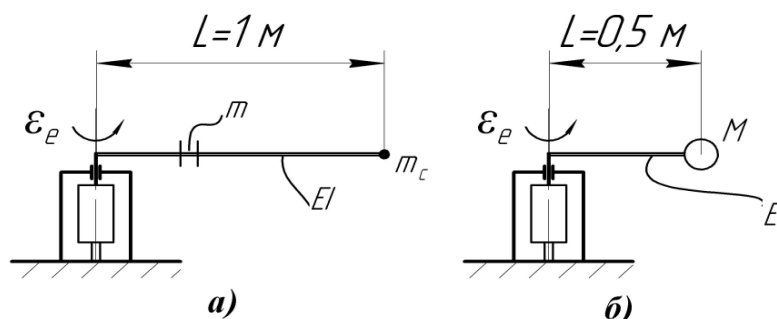


Рисунок 4.3 – Схема оптимального релейного управления (углового ускорения) вращением упругого консольного стержня: а) $L=1$ м; б) $L=0,5$ м; $M=1$ кг

Релейное угловое ускорение (как управление) задано следующим образом:

$$\varepsilon_e(t) = \frac{d^2\varphi_e}{dt^2} = E_1 \left(H(t) - 2H\left(t - \frac{T}{2}\right) + H(t - T) \right), \quad (4.10)$$

где $E_1 = \text{const}$; T – общее время переносного вращательного движения.

Для угла поворота, угловой скорости и углового ускорения соответствуют дифференциальные зависимости:

$$\frac{d\varphi_e(t)}{dt} = \omega_e(t), \quad \frac{d\omega_e(t)}{dt} = \varepsilon_e(t). \quad (4.11)$$

Заданы краевые условия, отражающие цель оптимального вращательного движения, — из исходного состояния переносного покоя в конечное состояние покоя: $\varphi_e(0)=0$; $\omega_e(0)=0$; $\varphi_e(T)=\varphi_1$; $\omega_e(T)=0$.

Необходимо за время T повернуть объект на угол φ_1 из исходного покоя в конечное состояние покоя.

Во время оптимального вращения стержень испытывает изгибные колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний сосредоточенной массы как системы с одной степенью свободы (без учета сопротивления) имеет вид:

$$\frac{d^2W}{dt^2} + k^2W = -L \cdot \ddot{\varphi}_e(t), \quad (4.12)$$

где k^2 — квадрат частоты собственных колебаний; L — длина консоли.

В примере (вариант а) $L=1$ м, $k=4\pi$ с⁻¹. Период собственных колебаний стержня равен $T_1=2\pi/k=0,5$ с. Общее время движения $T=2T_1=1$ с. Движение начинается из состояния абсолютного покоя. Графики относительного движения (колебаний во временном интервале $T \geq t \geq 0$) изображены на Рисунке 4.4. Из графиков следует, что при $t=T$ наступает относительный покой ($W(T)=0$, $\dot{W}(T)=0$), а с учетом переносного покоя ($\dot{\varphi}_e(T)=0$) достигается абсолютный покой.

Дополнительно, для второго варианта объекта, проверено вычисление периода собственных колебаний с сосредоточенной массой, но без учета распределенной массы стержня.

Исходные данные: $L=0,5$ м; $E=2,1 \cdot 10^{11}$ Па; $d=0,005$ м; $M=1$ кг. Вычисленные величины: $I = \frac{\pi d^4}{64}$; $C = \frac{3EI}{L^3}$; $\omega = \sqrt{\frac{C}{m}} = 12,4384$ с⁻¹; период собственных колебаний

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 0,505 \text{ с}; \text{ общее время вращения } T = 2T_1 = 1,01 \text{ с}.$$

Относительное движение описывается зависимостью:

$$W(t) = \frac{(\cos(kt) - 1)}{8\pi^2} \cdot \left(H(t) - 2H\left(t - \frac{T}{2}\right) + H(t - T) \right). \quad (4.13)$$

Учет линейно-вязкого сопротивления в относительном движении несущественно влияет на достижение абсолютного покоя в конце движения. Уравнение относительного движения:

$$\frac{d^2W}{dt^2} + 2n\frac{dW}{dt} + k_1^2W = -L\ddot{\varphi}_e(t), \quad (4.14)$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$. Например, для $n = 0,1 \cdot k$ частота равна $k_1 = 12,5 \text{ с}^{-1}$, период $T_1 = 2\pi/k_1 = 0,5025 \text{ с}$, а время движения $T = 2T_1 = 1,005 \text{ с}$. При таком характере затухания движение за время T практически не отличается от движения без его учета. Учет линейно-вязкого сопротивления в относительном движении несущественно влияет на достижение абсолютного покоя в конце движения.

Рассмотрены два варианта проектирования объекта с заданной частотой собственных колебаний $k = 4\pi \text{ с}^{-1}$.

Моделирование иллюстрируется на численном примере. При построении графиков (Рисунок 4.5) угла поворота $\varphi_e(t)$, угловой скорости $\omega_e(t)$ и углового ускорения $\varepsilon_e(t)$ принято: $T=1\text{с}$; $E_I=2\text{с}^{-2}$; упругий стержень поворачивается за время $T=1\text{с}$ на $0,5 \text{ рад}$ ($28,65^\circ$).

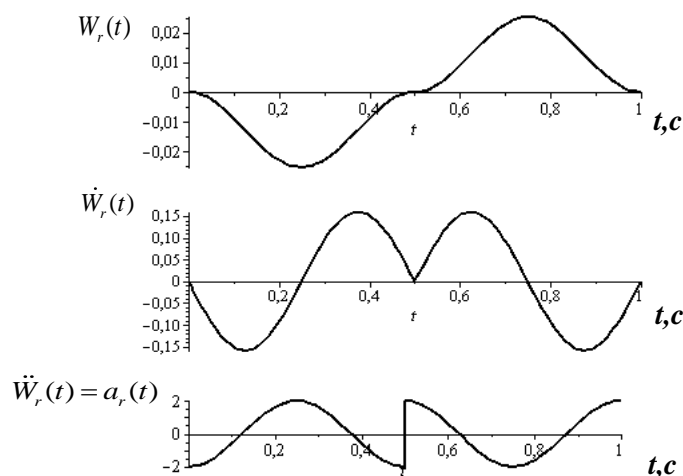


Рисунок 4.4– Графики относительного движения: перемещение $W_r(t)$, скорость $\dot{W}_r(t)$ и ускорение $\ddot{W}_r(t)$ сосредоточенной массы.

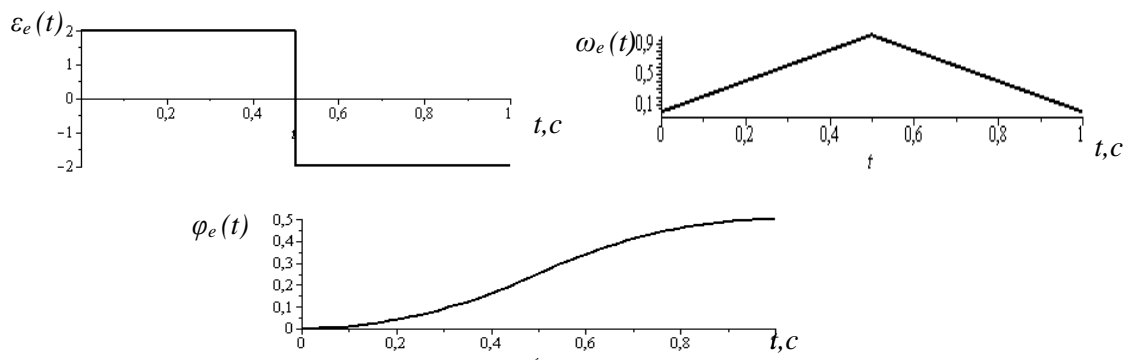


Рисунок 4.5 – Графики переносного вращательного движения: ускорение $\varepsilon_e(t)$, угловая скорость $\omega_e(t)$, угол поворота $\varphi_e(t)$.

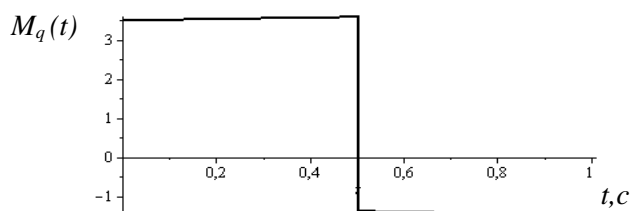


Рисунок 4.6 – График движущего момента в приводе.

реализующего заданное идеальное релейное угловое ускорение стержня

Вариант а (Рисунок 4.5а). Исходные данные: $L=1,0$ м; модуль упругости

$E=2,1 \cdot 10^{11}$ Па; диаметр стержня $d=0,005$ м; распределенная масса $m = \frac{\pi d^4}{4} \cdot \gamma \cdot L$

кг/м, плотность материала $\gamma = 7800$ кг/м³; осевой момент инерции $I = \frac{\pi d^4}{64}$. В

расчете используется параметр $\alpha = \sqrt[4]{\frac{mk^2}{EI}}$; $\lambda = \alpha \cdot L$. Из уравнения (4.15)

определялась величина сосредоточенной массы M .

С этой целью использовано трансцендентное уравнение, которое получено методом начальных параметров [83]:

$$\frac{M}{mL} \cdot \lambda (\tan(\lambda) - \tanh(\lambda)) - \left(1 + \frac{1}{\cosh(\lambda) \cdot \cos(\lambda)} \right) = 0. \quad (4.15)$$

Для принятых исходных данных из (4.15) найдена сосредоточенная масса $M=0,086$ кг, которая мала по сравнению с массой стержня $m_c = m \cdot L = 0,153$ кг.

Вариант б (Рисунок 4.5б). При прежних исходных данных, заданной сосредоточенной массе $M=1$ кг найден вылет консоли L . Из трансцендентного

уравнения (4.15) получен корень $L = 0,494$ м или $L \approx 0,5$ м. Итак, стержень длиной $L = 0,5$ м с сосредоточенной массой на конце $M \approx 1$ кг имеет собственную частоту колебаний $k_1 = 4\pi \text{ с}^{-1}$ или период $T_1 = 2\pi/k_1 = 0,5 \text{ с}$. Следовательно, требуемое общее время движения $T = 2T_1 \approx 1 \text{ с}$.

Действительный движущий момент, который практически обеспечит идеальное релейное вращательное оптимальное ускорение упругого объекта, находится из дифференциального уравнения вращения стержня (с учетом линейно-вязкого сопротивления, физического момента инерции ротора двигателя и других деталей, участвующих во вращении):

$$I_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -k_1 \frac{d\varphi_e}{dt} - M_T + M_\delta(t). \quad (4.16)$$

Из уравнения (4.16) для движущего момента получено:

$$M_\delta(t) = I_0 \frac{d^2 \varphi_e}{dt^2} + k_1 \frac{d\varphi_e}{dt} + M_T, \quad (4.17)$$

где $I_0 = I_c + I_d$; $I_c = ML^2 + \frac{(mL)^2}{3}$; I_d – физический момент инерции ротора;

M_T – момент трения.

Для принятых исходных данных ($k_1=0,1$; $M_T = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $I_d = 1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $I_c = 1,25 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$) график $M_\delta(t)$ изображен на Рисунке 4.6. Учет сопротивления меняет вид управляющего воздействия – происходит его смещение по вертикали.

Реализация полученного движущего момента позволяет с достаточной точностью достигать состояния абсолютного покоя в конце оптимального переносного вращательного движения.

Выводы по разделу

Результаты моделирования показывают, что кососимметричное релейное управление (угловое ускорение) без критерия быстродействия обеспечивает за приемлемое минимально возможное время оптимальный поворот упругого стержня из исходного состояния покоя в конечное состояние абсолютного покоя.

При строгом определении геометрических и физических параметров упругого объекта, его частоты и периода собственных колебаний находится уточненный вид релейного управления в приводе, позволяющий реализовать на практике конструируемый тип движения. Предложена простая схема реализации релейного вращательного кососимметричного управления. Пример использования – поиск ускорений рук упругих манипуляторов как систем с сосредоточенными и распределенными параметрами [84, 85].

ГЛАВА 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА СИНТЕЗА ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОГО ВРАЩЕНИЯ ОБЪЕКТА КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

5.1. Цель эксперимента и его актуальность

Поиск и внедрение оптимальных ускорений объектов технических систем с элементами конечной жесткости, реализующих технологические операции в различных областях техники, и в т.ч. – в аддитивном производстве, продолжает оставаться актуальной задачей. Быстрые перемещения упругих объектов, естественно, приводят к их колебаниям, влияющим на качество создаваемого изделия. Необходимо использовать такие ускорения, которые, устраняя колебания в конечном состоянии, обеспечивали бы таким образом точность и производительность функционирования исполнительных органов.

Выполнена экспериментальная проверка моделируемого динамического поведения объекта (упругого консольного стержня с распределенной массой) при синтезированных оптимальных переносных угловых ускорениях в виде синусоидальной и релейной функций, оценена эффективность снижения колебаний конца стержня при завершении движения. Время перемещения выбрано из моментных соотношений и физических возможностей привода звена робота, реализующего целенаправленное вращательное движение.

Ранее на примере конструирования переносного поступательного ускорения (типа разгон-торможение) перемещением упругих объектов с использованием алгебраического полинома выявлено снижение энергетических затрат на достижение цели движения с учетом ограничений. Получена регрессионная зависимость энергии от степени полинома и показано, что в алгоритме конструирования может непосредственно учитываться условие, отражающее значение предельно возможной энергии для достижения цели движения. Конструирование оптимального переносного вращательного движения объекта основано на использовании алгоритма РПО [1], согласно которому

аналитической кососимметричной функции переносного углового ускорения соответствует дифференциальное уравнение Эйлера для восстанавливаемого функционала-критерия, принимающего минимальное значение.

5.2. Экспериментальный стенд

Экспериментальная установка создана на базе робота Mitsubishi MELFA RV1-A-S12. На основании 1 установлен (ось J1) плечевой сустав 2, соединённый (ось J2) с плечом 3, на котором закреплен (ось J3) локтевой блок 4 с прикрепленным (ось J4) предплечьем 5, где на конце расположен (ось J5) механический интерфейс 6 для крепления схвата, при этом интерфейс 6 реализует вращения вокруг оси J6.

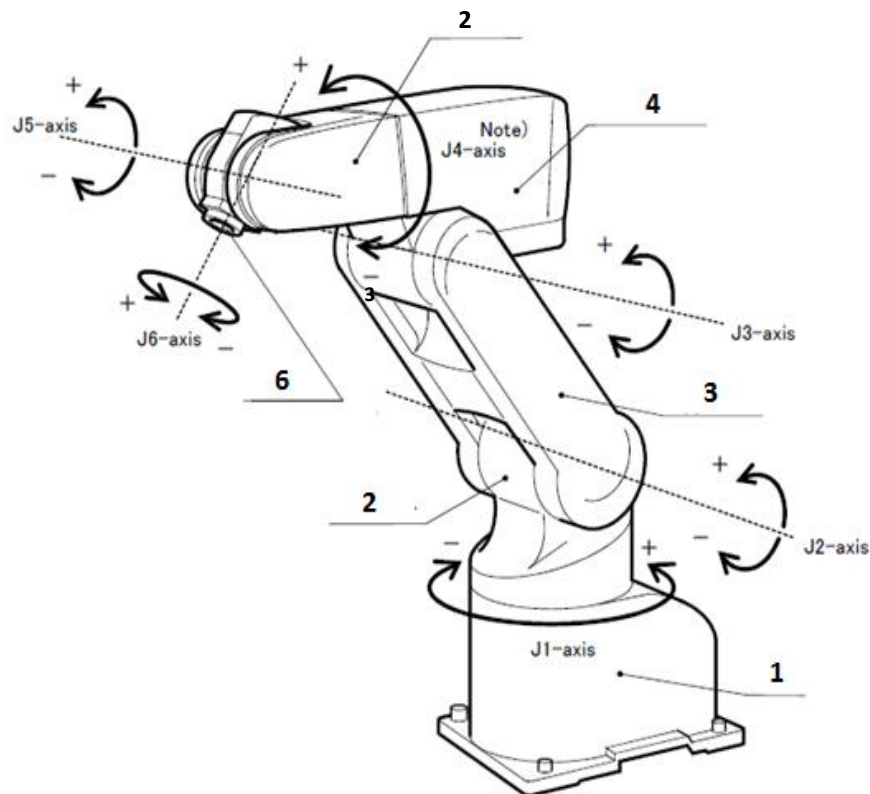


Рисунок 5.1 – Робот Mitsubishi MELFA RV1-A-S12

Согласованные вращательные движения звеньев 1..6 вокруг осей J1..J6 осуществляются по заданному закону перемещения схвата.

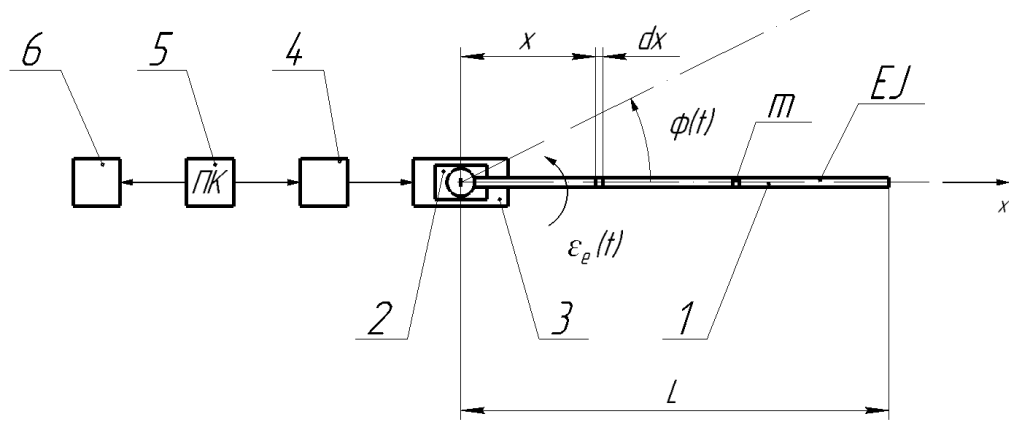


Рисунок 5.2 – Упрощенная схема экспериментальной установки

На Рисунке 5.2 изображена упрощённая блок-схема экспериментальной установки для реализации оптимального вращения стержня вокруг неподвижной оси: 1 – консольный стержень с распределённой массой; 2 – муфта; 3 – механический интерфейс, вращающийся вокруг оси J_6 ; 4 – контроллер робота; 5 – ПК; 6 – Arduino Mega 2560 с прикрепленным к нему гироскопом-акселерометром MPU 6050 .

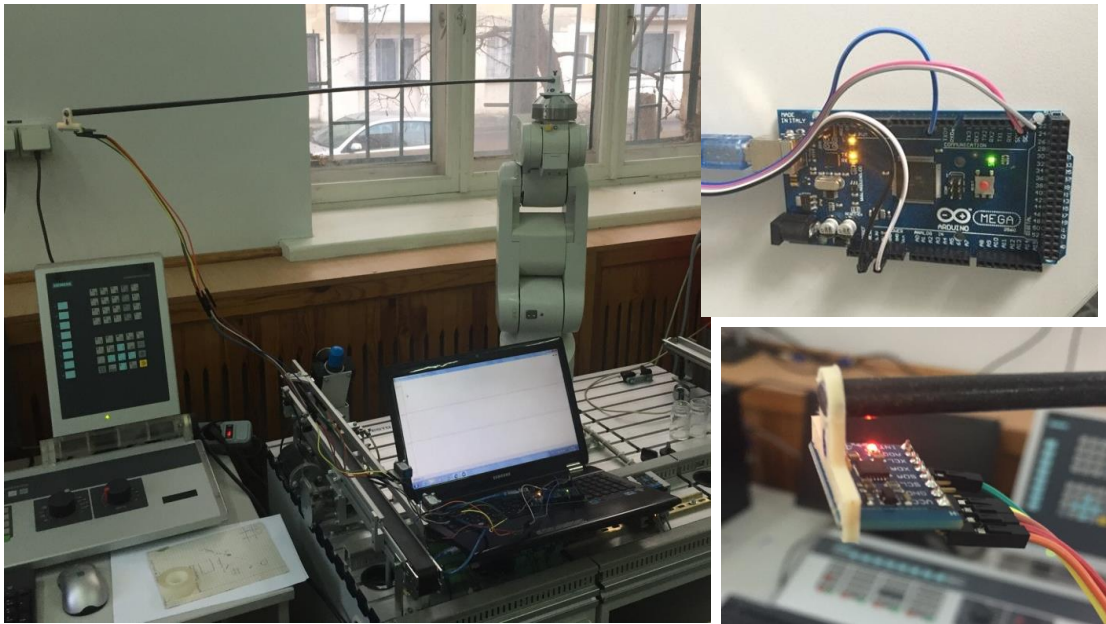


Рисунок 5.3 – Внешний вид стенда и средств регистрации колебаний

Система управления экспериментальной установкой реализует разгон и торможение с выработкой команды контроллеру робота, создающего питающее напряжение требуемой частоты.

5.3. Определение частот собственных колебаний консольного стержня

Конструирование оптимальных ускорений основано на учёте частоты собственных колебаний (или частоты первого тона – в случае распределённой массы стержня). Определение частоты иллюстрируется на примерах.

1. Стержень с сосредоточенной массой M на конце, но без учёта распределённой массы по длине. В этом случае частота $\omega_1 = \sqrt{\frac{C}{M}}$, где коэффициент

жёсткости $C = \frac{3EI}{L^3}$; E – модуль упругости первого рода; I – осевой момент инерции

поперечного сечения; d – диаметр; L – длина консольного образца (с жёстким закреплением одного конца и приведенной сосредоточенной массой M на другом

конце). Для сосредоточенной массы получено: $M = \frac{\pi d^2}{4} \gamma \cdot L$, где γ – плотность

материала. Исходные данные: $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па ; $L = 1,05$ м ; $\gamma = 7,8 \cdot 10^3$ кг / м³ .

Результаты: сосредоточенная масса $M = 0,1608$ кг ; частота $\omega_1 = 10,19$ с⁻¹ ; период

$T_1 = 2\pi / \omega_1 = 0,617$ с .

2. Определение частоты и периода (первого тона) для стержня с распределённой массой. Исходные данные: $m_0 = M / L = 0,1608$ кг / м;

$\omega_1 = 1,875^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m_0 L^4}} = 20,68$ с⁻¹; $T_1 = 2\pi / \omega_1 = 0,304$ с .

3. Частота ω_1 и период T_1 с учётом распределённой массы m_0 и сосредоточенной M и прежних исходных данных. Результат: $\omega_1 = 9,1615$ с⁻¹;

$T_1 = 0,686$ с . Интересно, что частота первого тона и период близки к первому случаю – для консольного стержня с сосредоточенной массой на конце.

Для экспериментальной проверки динамики оптимального движения предпочтителен вариант 2, который не предполагает использования дополнительной массы. Варьирование геометрических (L, d) и физических (E, γ) параметров в

окрестности 5-10% по отношению к проектируемым расчётным значениям частоты (и периода) собственных колебаний приводит к их изменению на 3-5%.

5.4. Конструирование синусоидального оптимального ускорения (разгон-торможение).

Принято угловое ускорение стержня $E_e = E \sin(pt)$, где $E, p = const$. После двукратного интегрирование с учётом краевых условий $\varphi_e(0) = 0, \omega_e(T) = 0, \varphi_e(T) = \varphi^*$, где T – общее время движения, определения произвольных постоянных и параметра E при $T = 2\pi / p$ получено:

$$E_e = \frac{\varphi^* p^2}{2\pi} \cdot \sin(pt), \quad \varphi_e = \frac{\varphi^*}{2\pi} \cdot [pt - \sin(pt)], \quad \omega_e = \frac{\varphi^* p}{2\pi} \cdot [1 - \cos(pt)]. \quad (5.1)$$

Дифференциальное уравнение относительного движения как системы с одной степенью свободы:

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + k^2 x_r = -L \frac{\varphi^* p^2}{2\pi} \cdot \sin(pt) \quad (5.2)$$

описывает, с учётом только первой моды, вынужденные колебания упругого стержня около вращающийся продольной оси. Перемещение $x_r(t)$ и скорость $\dot{x}_r(t)$ получены при нулевых начальных условиях ($x_r(0) = 0, \dot{x}_r(0) = 0$):

$$x_r(t) = \frac{L\varphi^* p^2}{2\pi(k^2 - p^2)} \cdot \left[\frac{p}{k} \cdot \sin(kt) - \sin(pt) \right], \quad (5.3)$$

$$\dot{x}_r(t) = \frac{L\varphi^* p^3}{2\pi(k^2 - p^2)} [\cos(kt) - \cos(pt)].$$

Моментные соотношения $x_r(T) = 0, \dot{x}_r(T) = 0$ для данного движения принимают наиболее простой вид: $\sin(kT) = 0, \cos(kT) - 1 = 0$. Найдены общие корни этой системы трансцендентных уравнений: $kT = n\pi$, где $n = 2, 4, 6 \dots$. Далее рассмотрены два случая выбора n [86].

Примем $n=4$. Тогда $kT = 4\pi$, и $T = 4\pi/k$ или $2\pi/p = 4\pi/k$, т.е. частота воздействия $p = k/2$. Для $k = 20,68 \text{ c}^{-1}$, $T = 2T_1 = 0,608 \text{ c}$, $\varphi^* = \pi/2$, графики переносного вращательного $E_e(t)$, $\omega_e(t)$, $\varphi_e(t)$ изображены на Рис.5.4а, а графики относительного движения $x_r(t)$ и $\dot{x}_r(t)$ – на Рис.5.5а.

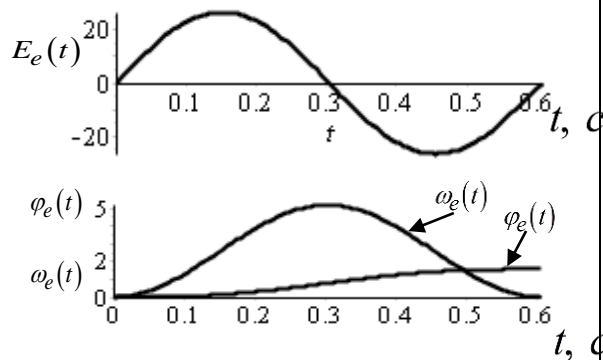


Рис.5.4а – Графики переносного вращательного движения $E_e(t)$, $\omega_e(t)$,

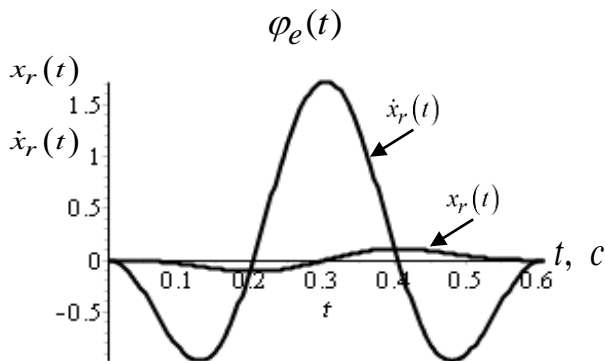


Рис.5.5а – Графики относительного движения $x_r(t)$ и $\dot{x}_r(t)$

В момент времени $T = 0,608 \text{ c}$, после поворота стержня на $\varphi^* = \pi/2$, наступает абсолютный покой.

Примем $n=8$. Тогда $kT = 8\pi$, и $T = 8\pi/k$ или $2\pi/p = 8\pi/k$, т.е. частота воздействия $p = k/4$. Для $k = 20,68 \text{ c}^{-1}$, $T = 4T_1 = 1,216 \text{ c}$, $\varphi^* = \pi/2$, графики переносного вращательного $E_e(t)$, $\omega_e(t)$, $\varphi_e(t)$ изображены на Рис.5.4б, а графики относительного движения $x_r(t)$ и $\dot{x}_r(t)$ – на Рис.5.5б.

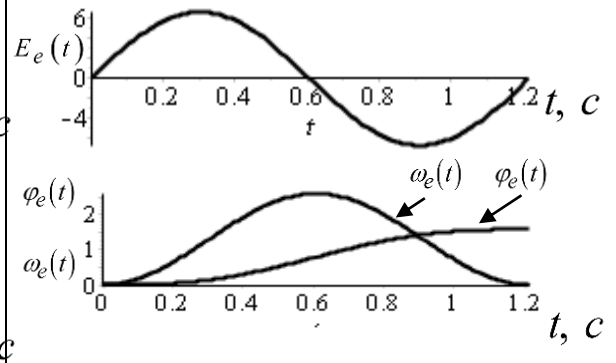


Рис.5.4б – Графики переносного вращательного движения $E_e(t)$, $\omega_e(t)$,

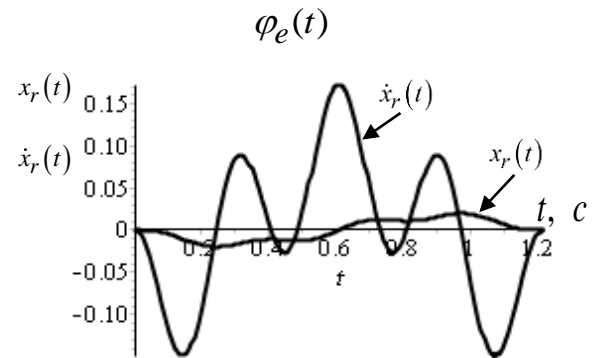


Рис.5.5б – Графики относительного движения $x_r(t)$ и $\dot{x}_r(t)$

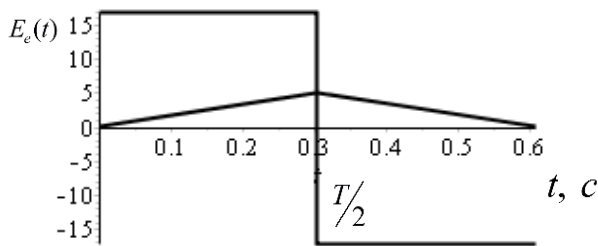
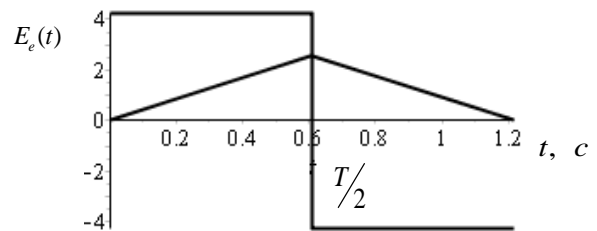
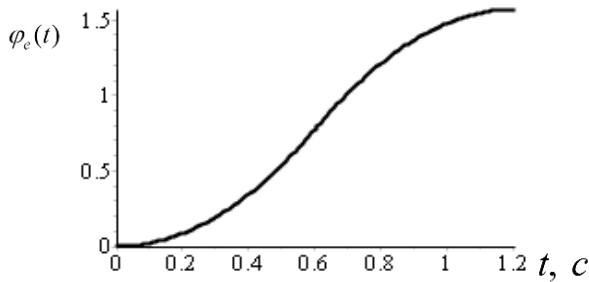
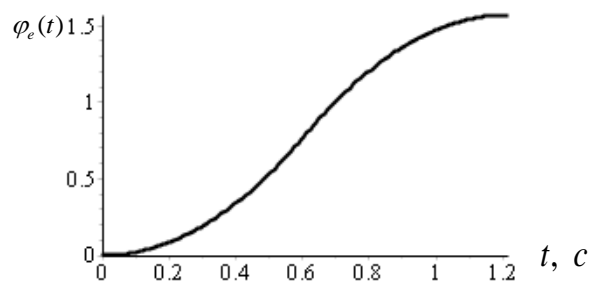
В момент времени $T = 1,216 \text{ c}$, после поворота стержня на $\varphi^* = \pi/2$, наступает абсолютный покой.

5.5. Релейное оптимальное угловое ускорение при вращении стержня.

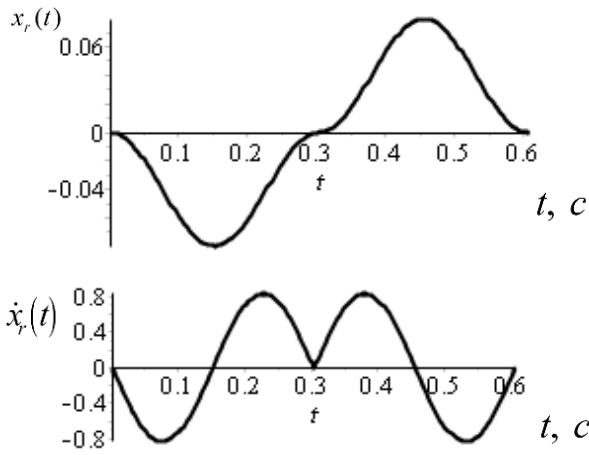
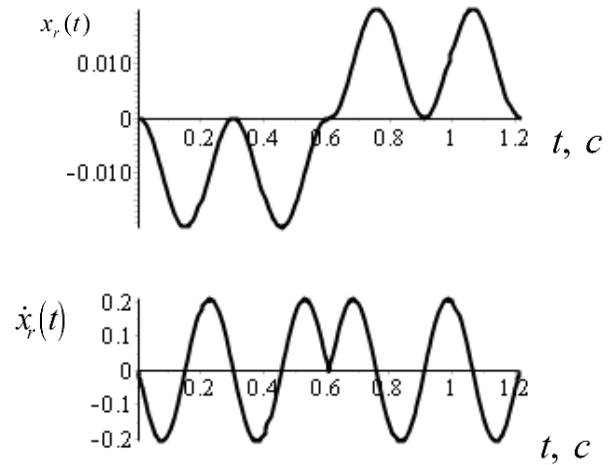
При интегрировании уравнения $\frac{d^2\varphi_e}{dt^2} = E_e(t)$ и учёте краевых условий (в точках $t=0$, $t=T/2$ и $t=T$) получено максимальное по абсолютной величине значение ускорения $E = \frac{4\varphi_e^*}{T^2}$, где φ_e^* – максимальный угол поворота. Ускорение с учётом функции Хевисайда записывается следующим образом:

$$E_e(t) = \frac{4\varphi_e^*}{T^2} \left[H(t) - 2H\left(t - \frac{T}{2}\right) + H(t - T) \right]. \quad (5.4)$$

При прежних исходных данных, опуская громоздкие выражения, для угловой скорости и угла поворота графики изображены на Рисунках 5.6а, 5.6б и Рисунках 5.7а, 5.7б для $n=4$ и $n=8$ соответственно.

Рис.5.6а – Графики $E_e(t)$, $\omega_e(t)$ Рис.5.6б – Графики $E_e(t)$, $\omega_e(t)$ Рис.5.7а – График $\varphi_e(t)$ Рис.5.7б – График $\varphi_e(t)$

Графики относительного перемещения $x_r(t)$ и скорости $\dot{x}_r(t)$ в случае релейного ускорения изображены на Рисунках 5.8а, 5.8б. Как и в случае синусоидального, при релейном ускорении за время T достигается абсолютный покой в конечном положении, определяемом углом $\varphi_e(T) = \varphi_e^* = \pi/2$.

Рис.5.8а – Графики $x_r(t)$, $\dot{x}_r(t)$ Рис.5.8б – Графики $x_r(t)$, $\dot{x}_r(t)$

Для практической реализации, с учетом возможностей привода робота, рассмотрим реализацию оптимального вращения стержня при $n=8$. В этом случае при рассчитанном ускорении стержня конечной жесткости максимальная переносная скорость $\omega_{max} = 2,57$ рад/с.

5.6. Организация и методика проведения эксперимента.

Необходимо осуществить подключение аппаратной части, позволяющей регистрировать ускорение свободного конца стержня, к персональному компьютеру.

Таблица 5.1 – Подключение MPU6050 к Arduino

ARDUINO	MPU6050
3,3V	VCC
GND	GND
SCL21	SCL
SDA20	SDA
2	INT

Подключить датчик MPU 6050 к плате Arduino, а её – к COM-порту ПК. Проверить наличие сигнала, включив в закладке «Инструменты» «Плоттер по последовательному соединению». Закрепить датчик MPU6050 на конце стержня, закрепленного на муфте в механическом интерфейсе. Значения ускорения в состоянии покоя должны быть близким к 0. Для этого необходимо выставить плату в горизонт. При необходимости – внести коррективы в поправочные коэффициенты датчика в следующем фрагменте скетча:

$$x = \text{float}(\text{accX}) * 2 / 32767 * 9.8 - 0.87; \quad y = \text{float}(\text{accY}) * 2 / 32767 * 9.8 + 0.2;$$

$$z = \text{float}(\text{accZ}) * 2 / 32767 * 9.8 - 1.5.$$

Повернуть на минимальной скорости стержень вокруг J6 при помощи пульта управления и убедиться в том, что провода, соединяющие Arduino и MPU6050, не натянуты. Для жестко закрепленного стержня измерялись его свободные колебания от единичного воздействия. Данные измерений сведены в Таблицу 5.2.

Таблица 5.2 – Экспериментальный период собственных колебаний стержня

№ опыта	Период собственных колебаний, T_i , с	Оценка мат. ожидания периода, T_1'	Оценка дисперсии, D_T	Стандартное отклонение, σ_T
1	0,29	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{li} =$ 0,29881	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (T_{li} - T_1')^2 =$ 0,00001494	$\sqrt{D_T} =$ 0,003865
2	0,30			
3	0,30			
4	0,2979			
5	0,3029			
6	0,3032			
7	0,2998			
8	0,295			
9	0,2993			
10	0,3			

На основании полученных результатов принято экспериментальное значение периода собственных колебаний $T_1=0,29881$ (с), $\omega = \frac{2\pi}{T_1} = 21,02736$ (с⁻¹),

$p = \frac{\omega}{2} = 10,51367977$ (с⁻¹), общее время движения $T = \frac{2\pi}{p} = 0,59762$ с,

$a = 13,81718278$. Выражение для углового ускорения принимает вид $\varepsilon_t(t) = 13,81718278 \cdot \sin(10,51367977 \cdot t)$.

Методика проведения эксперимента:

1. Из расчетов (Программа Maple – Приложение А) определено значение $\omega_{\max} = 2,57$ рад/с.
2. Поскольку угловая скорость робота известна в градусах в секунду, переведем ее: $\omega_{\max} = (180 \cdot 2,57 / \pi) = 147,25$ град/с.

3. Функция робота OVRD требует задания ω_{max} в % от предельной (210 град/с) скорости привода, реализующего вращение вокруг оси J6. Расчетная угловая скорость ω_{max} составляет 70,1% от предельной.
4. Функция робота ACCEL реализует релейное ускорение (разгон-торможение). Необходимо задать значение скорости ω_1 в % от предельной скорости привода через 0,2 секунды после пуска.

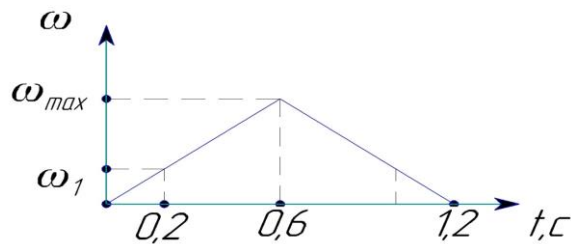


Рисунок 5.9 – График угловой скорости звена J6 робота

5. Рассчитаем ω_1 при $t=0,2$ с : $0,2 * \omega_{max} / 0,6 = 49,08$ град/с
6. Найдем часть в процентах %, которую ω_1 составляет от предельной:
 $49,08 / 210 * 100\% = 23,3\%$
7. Получаем значение для функции ACCEL 23.3, 23.3

Программирование робота производится в среде **COSIROP** на языке MELFA BASIC IV. Согласно тексту программы, приведенной в Таблице 5.3, происходит поворот интерфейса 6 вокруг оси J6 (Рис.1).

Таблица 5.3 – Программа робота и ее описание

<pre> 15 OVRD 100 20 IF M_IN(1)=1 THEN 25 ACCEL 60,80 30 MVS P3 40 ENDIF 50 GOTO 60 60 IF M_IN(3)=1 THEN 70 MVS P2 80 ENDIF 90 GOTO 15 </pre>	<p>Первой строкой задается скорость в % от максимальной, развиваемой приводом узла. По нажатию кнопки, связанной со входом 1, происходит перемещение в позицию P3 при ускорении типа разгон-торможение (команда ACCEL). Принцип работы команды ускорение: ACCEL 60, 80 устанавливает ускорение до 60% и замедление до 80%. (Для максимального ускорения / замедления 0,2 с; ускорение 0,2 / 0,6 = 0,33 сек. замедление 0,2 / 0,8 = 0,25 сек.). По нажатию кнопки, связанной со входом 3, происходит поступательное перемещение в позицию P2, при этом за 0,2с разгоняется до заданной скорости.</p>
---	--

5.7. Результаты эксперимента, их анализ

Эксперимент [87] подтверждает достижение с достаточно высокой точностью состояния покоя в конце движения за заданное время (Рисунок 5.10).

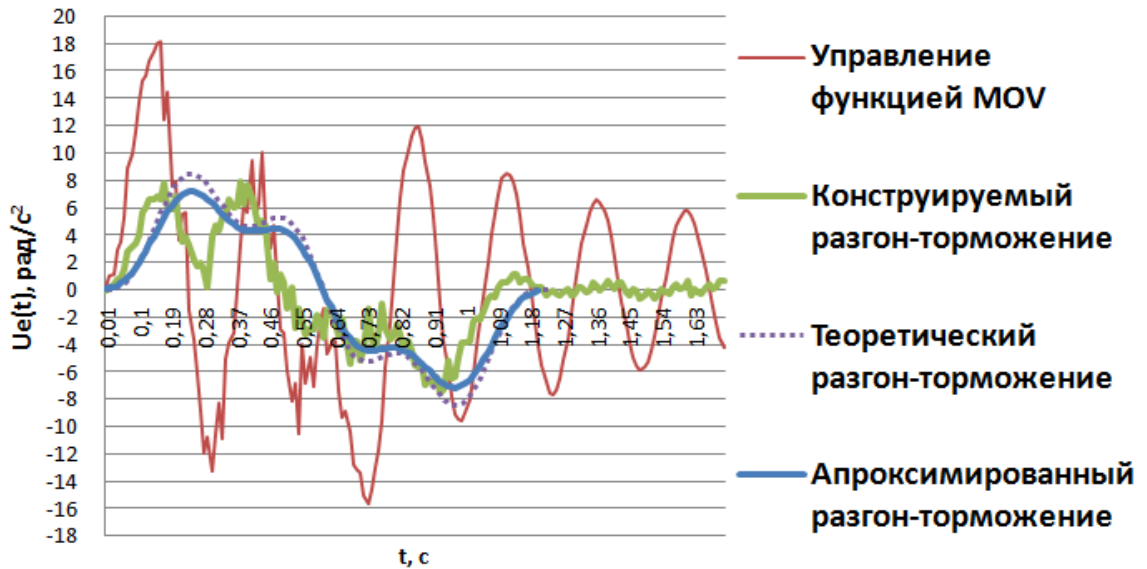


Рисунок 5.10 – Графики ускорений конца стержня

На Рисунке 5.10 отражена качественная и количественная разница между стандартной функцией работа MOV и предложенным ускорением для целенаправленного движения объекта конечной жесткости – в конце движения ускорение конца стержня близко к нулю, но присутствуют незначительные шумы.

Результаты измерений ускорения конца стержня сведены к массиву $A[1..21]$ фиксированных значений ускорений с шагом $\Delta t = 0,055$ с. Для аппроксимации ускорений по способу наименьших квадратов использовалась аналитическая функция

$$E_e(t) = -B \sin pt - C \sin kt, \quad (5.5)$$

где $B, C, p, k = const$, k – частота первого тона колебаний стержня. После вычисления, с использованием способа наименьших квадратов, получены следующие значения констант: $B = -4,32 \text{ м/с}^2$; $C = 1,024 \text{ м/с}^2$.

Для сравнения экспериментальных результатов с эквивалентным (релейному) гармоническим воздействием принята функция

$$E_e^*(t) = E_0 \sin pt \quad (5.6)$$

с учетом условия $\int_0^{T/2} E_0 \sin(pt) dt = \frac{E_0 T}{2}$, где $T = \frac{2\pi}{p}$; $p = \frac{k}{4}$, где k – частота первой моды собственных колебаний испытуемого упругого объекта. Для относительного движение конца стержня в уравнении (5.6) принято $E = \frac{\varphi^* p^2}{2\pi} L_1$, $\varphi^* = \pi/2$. В переносном вращательном движении после интегрирования уравнения (5.6) с учетом краевых условий $\varphi_e(0) = 0$, $\omega_e(0) = 0$, $\varphi_e(T) - \varphi^* = 0$, где φ^* – конечный угол поворота стержня, получены аналитические выражения для углового ускорения, угловой скорости и угла поворота:

$$E_e^*(t) = \frac{\varphi^* p^2}{2\pi} \sin(pt); \quad \omega_e^*(t) = \frac{\varphi^* p}{2\pi} (1 - \cos(pt)); \quad \varphi_e^*(t) = \frac{\varphi^* p}{2\pi} \left(t - \frac{1}{p} \sin(pt)\right). \quad (5.7)$$

Как следует из графиков (Рисунок 5.11), в момент времени $t = T$ достигается относительный покой $W_1^*(T) = 0$, $\dot{W}_1^*(T) = 0$, $\ddot{W}_1^*(T) = 0$. Время движения T найдено с использованием моментных соотношений $W_1^*(T) = 0$, $\dot{W}_1^*(T) = 0$, которые после преобразований сводятся к системе трансцендентных уравнений с использованием одного из общих корней (при $k = 4p$, $p = \frac{2\pi}{T}$).

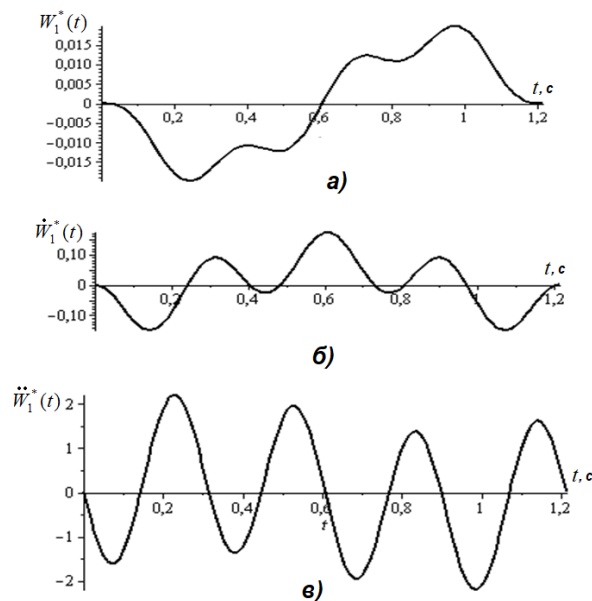


Рисунок 5.11 – Графики относительного перемещения (в), скорости (б), ускорения (а) конца стержня

Графики движения согласно эквивалентному гармоническому воздействию изображены на Рисунке 5.12.

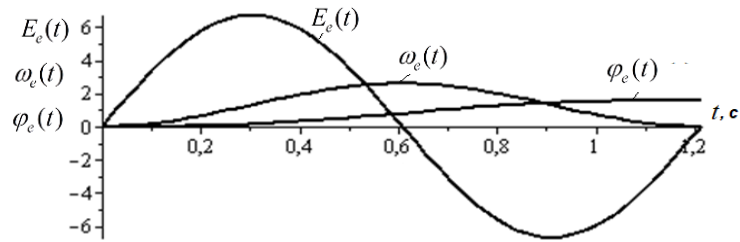


Рисунок 5.12 – Графики переносного вращения

С учетом $\varphi^* = \frac{\pi}{2}$ и времени $T = 1,2$ с график $E_e(t)$ и график $E_e^*(t) + W_1^*(t)$ изображены на Рисунке 5.13.

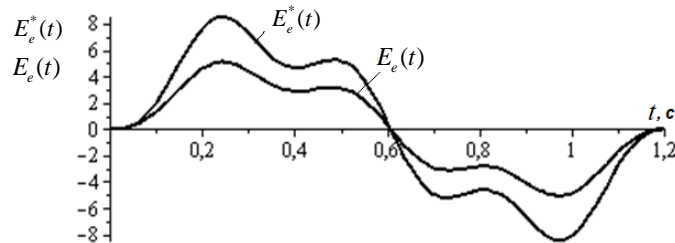


Рисунок 5.13 – Графики абсолютных экспериментального и теоретического угловых ускорений

На Рисунках 5.14, 5.15 изображены графики скоростей и перемещений, полученных экспериментально и теоретически.

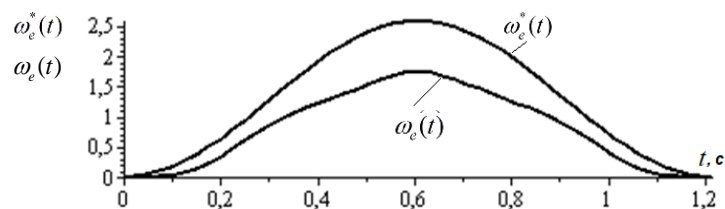


Рисунок 5.14 – Графики экспериментального и теоретического угловых скоростей

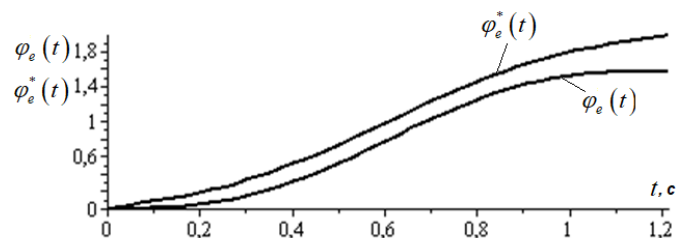


Рисунок 5.15 – Графики углов поворота

Как и следовало ожидать, экспериментальные значения ускорений меньше по сравнению с найденными теоретическими (аналитическое решение не предполагало учет сопротивлений движению).

5.8. Совершенствование алгоритмов конструирования ускорений упруго деформируемых объектов

Системы аналитических вычислений позволили эффективно осуществлять аналитические и численные эксперименты при конструировании целенаправленного ускорения поступательного и вращательного движений не только объектов как абсолютно твердых, но и деформируемых систем с использованием общего алгоритма решения полной обратной задачи — от задаваемой исходной функции перемещения или ускорения до восстанавливаемого функционала-критерия [1, 3, 16, 46]. Такой путь синтеза целенаправленного ускорения содержит ряд характерных особенностей и новых трудностей, требующих их преодоления с использованием систем аналитических вычислений.

Рассматриваются два типа алгоритмов конструирования переносных ускорений – в виде периодических и непериодических функций.

При конструировании кососимметричных ускорений последовательно реализуются следующие этапы:

- 1. Формулирование цели движения.**
- 2. Задание переносного ускорения в виде полинома, степень которого уточняется в процессе анализа цели движения объекта.**
- 3. Формулирование краевых условий и условий косо́й симметрии ускорения.**
- 4. Решение системы алгебраических уравнений (определение констант полинома), факторизация полинома, получение выражений для перемещения, скорости и ускорения переносного движения.**
- 5. Восстановление уравнения Эйлера и функционала-критерия.**
- 6. Сравнение результата конструирования с примером известного наиболее простого решения, найденного классическим вариационным методом теории оптимального управления; численный анализ; оценка результатов при**

использовании критериев – энергоемкости, принципа действия в форме Лагранжа, нормы мощности.

Пример. Цель движения – из исходного состояния покоя ($S_e(0) = 0$, $V_e(0) = 0$) переместить объект на заданное расстояние L за принимаемое фиксированное время T в новое состояние покоя ($S_e(T) = L$, $V_e(T) = 0$).

Условия кривой симметрии переносных ускорений

$$U_e(0) = a, \quad U_e(T) = -a, \quad \int_0^T U_e(t) dt + \int_{T/2}^T U_e(t) dt = 0, \quad U_e(T/2) = 0 \quad (5.8)$$

Усиленные условия кривой симметрии $\left. \frac{dU_e^n}{dt^n} \right|_{\text{при } t=T/2} = 0$, где $n = 1, 3, 5, \dots$

После определения констант $C_1 \dots C_{12}$, a полинома

$$U_e(t) = \sum_{i=1}^{12} C_i t^{i-1} \quad (5.9)$$

получено $a = \frac{26L}{T^2}$, $U_e(t) = \frac{a(T - 2T)^{11}}{T^{11}}$.

Выражения для скорости и перемещения ($V_e(t)$, $S_e(t)$) представлены в виде графиков на Рисунке 5.16.

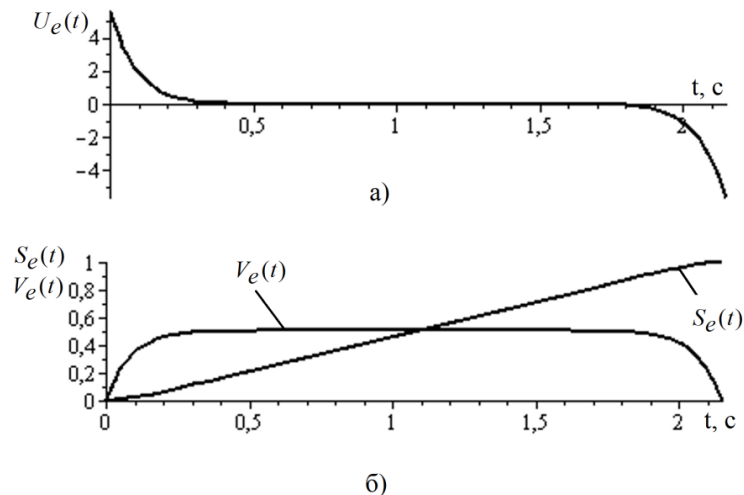


Рисунок 5.16 – Графики $U_e(t)$, $V_e(t)$ и $S_e(t)$

В случае известного примера [41] поиска оптимального ускорения вариационным методом с критерием оптимальности $J_1 = \int_0^T U^2(t) dt$, как известно,

выражения для ускорения, скорости и перемещения имеют вид:

$$U_1(t) = \frac{6L(T-2t)}{T^3}, \quad V_1(t) = \frac{6Lt(T-t)}{T^3}, \quad S_1(t) = \frac{Lt^2(3T-2t)}{T^3} \quad (5.10)$$

Графики функций $U_1(t)$, $V_1(t)$, $S_1(t)$ изображены на Рисунке 5.17.

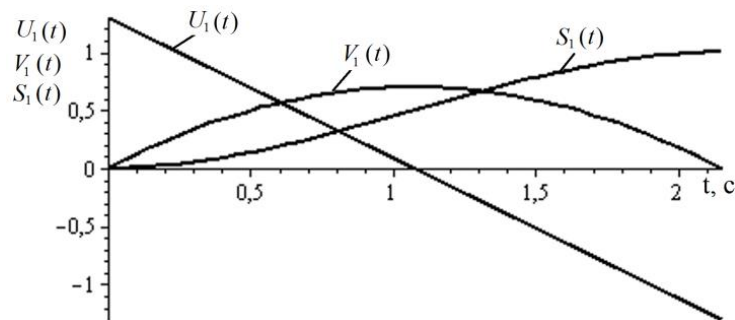


Рисунок 5.17 – Графики $U_1(t)$, $V_1(t)$ и $S_1(t)$

Для описания относительного движения (колебаний) упругой системы с одной степенью свободы использовано уравнение:

$$\ddot{x} + k^2 x = -\frac{a(T-2t)^{11}}{T^{11}} \quad (5.11)$$

где k – частота собственных колебаний, $a = \frac{26L}{T^2}$. При нулевых начальных условиях (движение из состояния относительного покоя, $x_r(0) = 0$, $\dot{x}_r(0) = 0$) решение уравнения громоздко. Для примера принято: $k = 2\pi \text{ с}^{-1}$, $L = 1 \text{ м}$, $T = T_1 n_1$, $T_1 = \frac{2\pi}{k} = 1 \text{ с}$. Первый общий корень $n_1 = 1,088$, а второй $n_2 = 2,15$. При использовании корня $n_2 = 2,15$ общее время движения $T = 2,15 \text{ с}$. (Графики Рисунок 5.18 а, б).

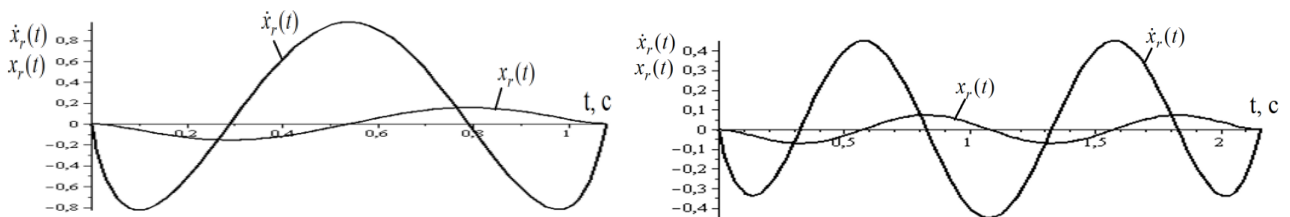


Рисунок 5.18 – Графики относительного движения

Далее рассматриваются ускорения в виде периодической функции (гармонические функции).

Примеры: $U_e(t) = a \sin^n(pt)$, $U_e(t) = a \cos^n(pt)$, где $n = 1, 3, 5, 7, \dots$,

или, например, их следующие комбинации: $U_e(t) = a \sin^2(pt) + \cos(pt)$, $U_e(t) = a \cos^2(pt) \sin(pt)$ и другие.

Для исключения громоздких аналитических преобразований дальше в качестве примера используем функцию переносного ускорения вида

$$U_e(t) = a \sin^3(pt), \quad (5.12)$$

где скорость и перемещение $V_e(t) = \int U_e(t) dt + C_1$, $S_e(t) = \int V_e(t) dt + C_2$.

Краевые условия: $S_e(0) = 0$, $V_e(0) = 0$, $V_e(T) = 0$, $S_e(T) = L$. После определения констант получены выражения

$$U_e(t) = \frac{3\pi L}{T^2} \sin^3(pt), \quad V_e(t) = \frac{L}{2T} (-3 \cos(pt)T - 6T \sin pt + \cos^3(pt) + 2), \quad (5.13)$$

$$S_e(t) = \frac{L}{12\pi T} (-\sin^3(pt)T - 6T \sin pt + 12\pi t).$$

Графики $U_e(t)$, $V_e(t)$ изображены на Рисунке 5.19.

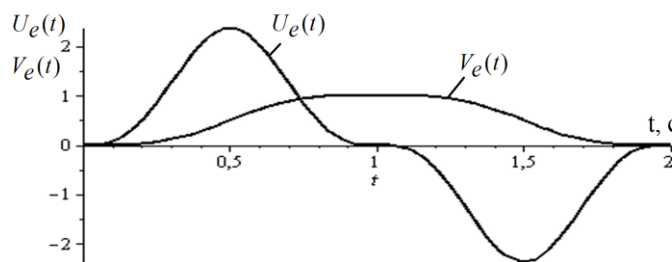
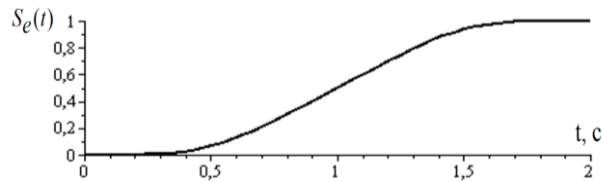


Рисунок 5.19 – Графики $U_e(t)$ и $V_e(t)$

Вычислены интегральные показатели: энергия $J_1 = \int_0^{T/2} U_e \cdot V_e dt = \frac{4L^2}{T^2}$;

действие $J_2 = 2 \int_0^T V^2 dt = \frac{1,64062L^2}{T}$; энергодействие $J_1 \cdot J_2 = \frac{6,562L^4}{T^3}$; норма

мощности $J_4 = \int_0^T U_e^2 dt = \frac{27,75L^2}{T^3}$. При $t = 2$ с, $L = 1$ м график $S_e(t)$ изображен на Рисунке 5.20.

Рисунок 5.20 – График $S_e(t)$

Итак, алгоритм конструирования оптимального целенаправленного переносного ускорения проиллюстрирован на характерных примерах двух типов функций ускорений – непериодической и периодической. В случае упругого объекта за приемлемое время, согласованное с периодом собственных колебаний объекта и найденное из моментных соотношений, достигается абсолютный покой.

Выводы по разделу

1. Результаты эксперимента подтверждают достаточную эффективность предложенного метода синтеза целенаправленного движения объекта конечной жесткости.

2. Регрессионная зависимость энергии от степени полинома показывает, что в алгоритме конструирования для практической реализации может непосредственно учитываться условие, отражающее значение возможной минимальной энергии для достижения цели движения; с ростом степени полинома ($n \rightarrow \infty$) ускорения затрачиваемая на реализацию целенаправленного движения энергия стремится к предельному значению.

3. Непосредственное использование в алгоритме конструирования дополнительного энергетического условия (например, $A_n - \frac{A_1}{2} = 0$) с ростом n приводит к существенному практическому снижению энергоемкости целенаправленного движения при достижения цели движения.

4. Сконструированные целенаправленные ускорения применимы для переносного поступательного и вращательного движений упругих объектов. Приемлемое время движения находится из числа общих корней системы трансцендентных уравнений, в которые превращаются моментные соотношения (в относительном движении). Абсолютный покой в конце движения означает совпадение во времени переносного и относительного покоя.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Найдены и исследованы новые целенаправленные поступательные и вращательные переносные ускорения объектов с упругими элементами, не предполагающие использование дополнительной энергии для подавления упругих колебаний в конце движения. При возрастании степени полинома ускорения выявлено снижение энергоемкости движения без потери производительности и точности позиционирования.
2. Конструирование ускорений упругого объекта основано на использовании алгоритма решения полной обратной задачи вариационного исчисления с учетом процедуры поиска приемлемого времени движения из числа общих корней системы трансцендентных уравнений (моментных соотношений в относительном движении). Исследована динамика систем с упругими элементами, сосредоточенными и распределенными массами при целенаправленных поступательных и вращательных движениях.
3. Разработаны и исследованы математические модели динамики целенаправленного движения исполнительных органов объектов современной техники с оценкой влияния элементов конечной жесткости на точность выполнения рабочих операций.
4. Результаты конструирования переносных поступательных и вращательных движений объектов применено для реализации формообразующих траекторий исполнительных элементов 3D-принтеров. Теоретически доказано и экспериментально установлено, что абсолютный либо относительный покой движущегося упругого объекта достигается при использовании широкого класса кососимметричных ускорений типа «разгон-торможение».
5. На основе манипулятора Mitsubishi MELFA RV-1A разработан лабораторный экспериментальный стенд и методика для реализации и анализа переносного углового ускорения консоли конечной жесткости с распределенной массой. При быстром вращении в конце движения снижаются (практически в 5-9 раз) колебания

конца консоли, что согласуется с результатами математического моделирования (Maple, MathCAD, MATLAB).

6. Изучены и систематизированы конструкции и тенденции в развитии манипуляторов с возможностью FDM 3D-печати. Результаты исследований использованы для изготовления экранирующих ЭМИ вентиляционных панелей. Повышена производительность аддитивного технологического процесса (с 12 ч до 7,5 ч) без потери качества изготавливаемых панелей.

7. В Приложении к диссертации представлены программы компьютерного моделирования динамики целенаправленных движений объектов с элементами конечной жесткости, а также патент и акты внедрения.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$U_e^*(t)$ – известное ускорение (управление), найденное вариационным методом;

$U_e(t)$ – конструируемое ускорение (управление);

$\ddot{S}_e(t) = U_e \rightarrow \int_0^T U_e^2 dt \rightarrow \frac{d^4 S_e}{dt^4} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^4 C_i \cdot t^{i-1}$ – пример вариационного решения

(уравнение движения \rightarrow функционал \rightarrow уравнение Эйлера \rightarrow решение уравнения \rightarrow краевые условия);

$S_e(t) \rightarrow \frac{d^6 S_e(t)}{dt^6} \rightarrow \int_0^T (\dot{U}_e)^2 dt = \int_0^T \left(\frac{d^3 S_e}{dt^3} \right)^2 dt$ – пример реверсионного конструирования

(перемещение \rightarrow уравнение Эйлера \rightarrow восстановление функционал-критерий);

$2 \int_0^{T/2} U_e(t) \cdot V_e(t) dt$ – энергоемкость управления типа «разгон-торможение» ($m=1$ кг);

x_r, \dot{x}_r – относительные перемещение и скорость;

$x_r(T)=0, \dot{x}_r(T)=0$ – моментные соотношения в относительном движении

(трансцендентные уравнения);

$\int_0^T V_e^2 dt$ – действие по Лагранжу ($m=1$ кг).

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Бохонский А.И. Реверсионный принцип оптимальности. / А.И. Бохонский. – Москва: Вузовский учебник: ИНФРА, 2016. –174 с.
2. ГОСТ 25686-85. Манипуляторы, автооператоры и промышленные роботы. Термины и определения // Сайт Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии. 1985. URL: <http://protect.gost.ru/document.aspx?control=7&id=142896> (дата обращения: 3.сентябрь.2015).
3. Бохонский А.И., Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения. / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, М.И. Мозолевский. – Севастополь: Издательство СевНТУ, 2007. – 296 с.
4. Шахнипур М. Курс робототехники. / М. Шахнипур. – Москва: «Мир», 1990. – 527 с.
5. Dwivedy S.K. Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review / S.K. Dwivedy, P.Eberhard // Mechanism and Machine Theory. – 2006. – Volume 41, Issue 7 – P. 749-777.
6. Meggiolaro M.A. Error identification and compensation in large manipulators with application in cancer proton therapy / M.A. Meggiolaro, S.Dubowsky, C.Mavroidis // Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica. – 2004. – Vol. 15. №. 1. – pp.71-77
7. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. / С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1967. – 444с.
8. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. /В.Л. Бидерман. – Москва: Изд-во «Высшая школа», 1980. – 408 с.
9. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. / Я.Г. Пановко – Москва: Изд-во «Наука», 1980. – 272 с.
10. Бабаков И.М. Теория колебаний. / И.М. Бабаков – Москва: Изд-во «Наука», 1968. – 650 с.

11. Болотин В.В. Вибрации в техники. Справочник. В 6-ти т.Т.1. Колебание линейных систем. / В.В. Болотин – М: Машиностроение, 1978. – 352 с.
12. Карновский И.А. Методы оптимального управления колебаниями деформируемых систем. / И.А. Карновский. – Киев: Изд-во «Вища школа», 1982. – 116 с.
13. Троицкий А.И. Оптимальные процессы колебаний механических систем. / А.И. Троицкий. – Л.: Машиностроение, 1976. – 248с.
14. Черноусько Ф.Л. Манипуляционные роботы: динамика, уравнение, оптимизация. / Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотник, В.Г.Градецкий. – М: Наука, 1989. – 368 с.
15. Воронов А.А. Теория автоматического управления.ч.II.Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления. /А.А. Воронов. – Москва: Высшая школа, 1986. – 504 с.
16. Бохонский А.И. Энергоемкость управления перемещением объектов / А.И. Бохонский // Фундаментальные основы механики. 2017. – №. 2. – С. 38-41.
17. Yigit A.S. On the stability of PD control for a two-link rigid flexible manipulator / A.S.Yigit // ASME Journal of Dynamics Systems, Masurement, and Control. 1996. –№. 116. – P. 179-185.
18. Lin S.H. Control of a six-degree-of-freedom flexible industrial manipulator / S.H. Lin, D. Tosunoglu, D. Tesar // IEEE Control System Magazine. –1991. – Vol. 3. №. 11. –P. 24-30.
19. Utkin V.A. Control of elastic multi-link manipulators based on the dynamic compensation method / V.A. Utkin // IEEE Intrnational Symposium on Circuits and Systems. –1998. – №. 6. –P. 594-597.
20. Sun D. A PZT actuator control of a single-link flexible manipulator based on linear velocity feedback and actuator placement / D.Sun, J.K. Mills, J.Shan, [et al] // Mechatronics. –2004. –№. 14. – P. 381-401.
21. Hassan H. Active vibration control of a flexible one-link manipulator using a multivariable predictive controller / H.Hassan, R.Dubay, C.Li, [et al] // Mechatronics. –2007. – №. 17. – P. 311-323.

22. Mirzaee E. Maneuver control and active vibration suppression of a two-link flexible arm using a hybrid variable structure. Lyapunov control design / E. Mirzaee, M. Eghtesad, S.A. Fazelzadeh // *Acta Astronautica*. – №. 67, – 2010. – P. 1218-1232.
23. Dadfarnia M., Jalili N., Liu Z., Dawson D.M. An observer-based piezoelectric control of flexible Cartesian robot: theory and experiment / M. Dadfarnia, N. Jalili, Z. Liu, [et al] // *Control Engineering Practice*. – №. 12, – 2004. – P. 1041-1053.
24. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. / Я.Н. Ройтенберг. – Москва: Изд-во «Наука», 1971. – 396 с.
25. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. / Л.Э. Эльсгольц. – Москва: Изд-во «Наука», 1965. – 424 с.
26. Воронов А.А. Теория автоматического управления. Ч. I. Теория линейных систем автоматического управления. / А.А. Воронов. – Москва: Изд-во «Высш. школа», 1986. – 367 с.
27. Ногин В.Д. Введение в оптимальное управление. / В.Д. Ногин. – Санкт-Петербург: Изд-во «ИОТАС», 2008. – 92 с.
28. Шмутцер Э. Основные принципы классической механики и классической теории поля (канонический аппарат). / Э. Шмутцер. – Москва: Изд-во «Мир», 1976. – 156 с.
29. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. / И.Л. Акулич. – Москва: Изд-во «Высшая школа», 1986. – 319 с.
30. Красовский Н.Н. Теория управления движением. / Н.Н. Красовский. – Москва: Изд-во «Наука», 1968. – 476 с.
31. Гамкрелидзе Р. В. Математические работы Л. С. Понтрягина / Р.В. Гамкрелидзе. – М: МИАН, 1999, – т.224, – С.14-27.
32. Математическая теория оптимальных процессов. / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Р. Мищенко. – Москва: Изд-во «Физматиз», 1961. – 392 с.

33. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. / В.Г. Болтянский. – Москва: Изд-во «Наука», 1969. – 408 с.
34. Нетушил А.В. Теория автоматического управления ч.II. /А.В. Нетушил. – Москва: Изд-во «Высш. школа», 1972. – 432 с.
35. Бохонский А.И. Конструирование линейного объекта по заданным функциям выхода / А.И. Бохонский, А.И. Рыжков // Сборник статей международной исследовательской организации «Cognitio» по материалам XIII международной научно-практической конференции: «Актуальные проблемы науки XXI века» 2 часть, г. Москва: сборник со статьями (уровень стандарта, академический уровень). – Москва: Международная исследовательская организация «Cognitio». – 2016. – С.9-13.
36. Бохонский А.И. Релейное оптимальное управление как аналог сухого трения / А.И. Бохонский, Т.В. Мозолевская, А.И. Рыжков // Международный сборник научных трудов ДонНТУ «Прогрессивные технологии и системы машиностроения» Донецкий национальный технический университет. – Донецк: Изд-во ДонНТУ. – 2016. – Вып.№2(53). – С.16-22.
37. Солодовников В.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. / В.В. Солодовников, В.Н. Плотников, А.В. Яковлев. – Москва: Машиностроение, 1985. – 536 с.
38. Абдуллаев Н.Д. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. / Н.Д. Абдуллаев, Ю.П. Петров. –Москва: Энерго-атомиздат, 1985. – 240 с.
39. Черноусько Ф.Л. Управление колебаниями. / Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Б.Н. Соколов. – Москва: Изд-во «Наука», 1980. – 384 с.
40. Дорф Р., Современные системы управления. /Р. Дорф, Р. Бишоп. – Москва: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.
41. Бохонский А.И. Вариационное и реверсионное исчисления в механике. / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская. – Севастополь: Издательство СевНТУ, 2012. – 212 с.

42. Бохонский А.И. Актуальные задачи вариационного исчисления. / А.И. Бохонский. – Palmarium Academic Publishing, 2013. – 78 с.
43. Бохонский А.И. Конструирование оптимальных управлений движением объектов как абсолютно твердых и деформируемых тел / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, А.И. Рыжков // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. Материалы Международной научно-технической конференции «Динамика, надежность и долговечность механических и биомеханических систем». – Орёл: ФГБОУ ВПО «Государственный университет – учебно-научно-производственный комплекс». – 2016. – №3(317) – С.70-76.
44. Бохонский А.И. Оптимальное перемещение упругого объекта с учетом в относительном движении линейно-вязкого сопротивления / А.И. Бохонский, М.М. Майстришин, А.И. Рыжков // Современные проблемы теории машин. – Новокузнецк: ИП Жукова Елена Валерьевна. – 2017. – №5. – С.7-9.
45. Бохонский А.И., Рыжков А.И. Оптимальное управление переносным движением нелинейных систем / А.И. Бохонский, А.И. Рыжков // Вісник СевНТУ. Севастополь: изд-во СевНТУ. – 2014. – №147. –С. 15-19.
46. Bokhonsky A.I. Modeling and analysis of system in motion. / A.I. Bokhonsky, S.J. Zolkiewski–Gliwice: Wydawnictwo politechniki, 2011. – 171 pp.
47. Бохонский А.И. Оптимальность конструируемых управлений перемещением объектов / А.И. Бохонский, М.М. Майстришин, А.И. Рыжков // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. Орёл: ФГБОУ ВО Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева. – 2017. – №3(323). – С.31-38.
48. Бохонский А.И. Энергоемкость управлений перемещением объектов / А.И. Бохонский, А.И. Рыжков // Материалы международной научно-технической конференции Автоматизация и приборостроение: проблемы и решения: материалы междунар. науч.-техн. конф. Севастополь, 5-9 сентября 2016г. – Севастополь: ФГАОУ ВО «СевГУ», – 2016. – С.18-21.

49. Краснов М.Л., Вариационное исчисление : задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие для вузов / М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко. – М.: Едиториал УРСС, 2020. – 168 с.
50. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц – М.: Наука, 1969. – 424 с.
51. Васильева А.Б. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. 2-е изд. / А.Б. Васильева, Г.Н. Медведев.– М.: Физматлит, 2005. – 432 с.
52. Бохонский А.И. Принцип и теоремы реверсионного исчисления / А.И. Бохонский, Н.И.Варминская, А.И. Рыжков // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. Орёл: ФГБОУ ВО Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева. – 2021. – № 3 (347). – С. 12-20.
53. Петров Ю.П. Вариационные методы теории автоматического управления. 2-е изд. / Ю.П. Петров. – Ленинград: Энергия, 1977. – 280 с.
54. Bokhonsky A., Varmiskaya N., Ryzhkov A. Reducing of energy consumption for the object's motion with designed optimum control // International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment: Mechanical Engineering and Materials Science - MATEC Web of Conferences. Sevastopol. – 2020. – Vol. 329.
55. Бохонский А.И. Оптимальное перемещение упругого объекта с учетом линейно-вязкого сопротивления / А.И. Бохонский, А.И. Рыжков // Сборник публикаций научного журнала «Chronos» по материалам VII международной научно-практической конференции 2 часть: «Вопросы современной науки: проблемы, тенденции и перспективы» г. Москва: сборник со статьями (уровень стандарта, академический уровень). – Москва: Научный журнал «Chronos». –2016. – С.81-87.
56. Бохонский А.И. Конструирование управляемого движения объекта / А.И. Бохонский, А.И. Рыжков // Мехатроника, автоматика и робототехника:

- материалы международной научно-практической конференции. – Новокузнецк: НИЦ МС, 2017. – №1. – С.64-69.
57. Бохонский А.И. Пример конструирования управляемого движения упругого объекта / А.И. Бохонский, А.И. Рыжков // Вестник современных технологий. Севастополь: ФГАОУ ВО «СевГУ». – 2019. – № 2 (14). – С. 55-58.
58. Бохонский А.И. Снижение энергоёмкости реверсионно конструируемого переносного ускорения объекта / А.И. Бохонский, М.М. Майстришин, А.И. Рыжков // Автоматизация и измерения в машино-приборостроении Севастополь: ФГАОУ ВО «СевГУ». – 2020. – № 4(12). – С. 52-60.
59. Бохонский А.И. Управление с минимальной энергией переносным движением объектов / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, А.И. Рыжков // Автоматизация и измерения в машино-приборостроении Севастополь: ФГАОУ ВО «СевГУ». – 2021. – № 1(13). – С. 76-83.
60. Бохонский А.И. Минимизация энергии управления для реализации цели движения / А.И. Бохонский, А.И. Рыжков // Фундаментальные основы механики – СПб: ИП Жукова Елена Валерьевна. – 2021. – №7. – С.13-17.
61. Bokhonsky A., Varminskaya N., Maistrishin M., Ryzhkov A. Minimum energy capacity for «acceleration-braking» control // ICAIIS 2021: 2021 2nd International Conference on Artificial Intelligence and Information. Chongqing. 2021.
62. Бохонский А.И. Алгоритм конструирования оптимального движения упругого объекта / А.И. Бохонский [и др.] // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. Орёл: ФГБОУ ВО Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева. – 2021. – № 4 (348). – С. 33-38.
63. Бохонский А.И. Алгоритмы реверсионного конструирования оптимальных управлений переносным движением объектов / А.И. Бохонский, М.М. Майстришин, А.И. Рыжков // Автоматизация и измерения в машино-

- приборостроении Севастополь: ФГАОУ ВО «СевГУ». – 2020. – № 3(11). – С. 12-19.
64. Зеленко М.А. Аддитивные технологии в машиностроении / М.А. Зеленко, М.В. Нагайцев, В.М. Довбыш. – Москва: ГНЦ РФ ФГУП «НАМИ», 2015. –210 с.
65. Смирнов О.И. Моделирование технологии послойного синтеза при разработке изделий сложной формы / О.И.Смирнов, С.В.Скородумов // Современные наукоемкие технологии. –2010. – №4, – С. 83–87.
66. Сафин Д.Ю. Будущее машиностроения России: сб. тр. Всеросс. конф. молодых учёных и специалистов (Москва, 28 сентября-01 октября 2011 г.) // Технологии 3D прототипирования и макетирования. Москва. 2011.
67. Aliheidari N. Fracture resistance measurement of fused deposition modeling 3D printed polymers / N.Aliheidari, R.Tripuraneni, A.Ameli [et al]// Polymer Testing, Vol. 60, – 2017. – P. 94-101.
68. Song Y., Li Y., Song W., Yee K., Lee K.Y., Tagarielli V.L. Measurements of the mechanical response of unidirectional 3D-printed PLA / Y. Song, Y. Li, W. Song, [et al]// Materials & Design, Vol. 123, – 2017. – P. 154-156.
69. Патент CN 105965897, МПК В29С 67/00. Mechanical-arm-type 3D printer / He L. ; Huang H. ; Huang H. ; [et al], заявл. 29.06.2016; опубл. 28.09.2016.
70. Бохонский А.И. Управление перемещением исполнительных органов манипуляторов при заданной геометрии создаваемого объекта / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, А.И. Рыжков // Сборник научных трудов Черноморского высшего военно-морского училища – Севастополь: ЧВВМУ имени П.С. Нахимова, – 2018. – Вып. 1(10). – С.175-180.
71. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели / П.Д. Крутько. –М.: Наука, 1987. –307 с.
72. Бохонский А.И. Динамика мехатронного модуля с учетом конечной жесткости ременной передачи / А.И. Бохонский, М.М. Майстришин, А.И. Рыжков // Интеллектуальные системы, управление и мехатроника – 2016:

- Материалы Всероссийской научн.-техн. конф., Севастополь 19-21 мая 2016 г. – Севастополь: ФГАОУ ВО «СевГУ». – 2016. – С. 122-126.
73. Bokhonsky A. Modeling and investigation of discrete-continuous vibrating mechanic systems with damping. / A. Bokhonsky, A. Buchacz, M. Placzek, A. Wrobel. – Gliwice: Wydawnictwo Politechniki, 2011. – 171 p.
74. Bokhonsky A., Experimental test of the optimal rotation for the finite stiffness cantilever rod / A. Bokhonsky, M. Maistrishin, A. Ryzhkov // International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment (ICMTMTE 2017). – MATEC Web of Conferences 129, 03021 (2017) Режим доступа: https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/abs/2017/43/matecconf_icmtmte2017_03021/matecconf_icmtmte2017_03021.html.
75. Бохонский А.И. Использование телескопического манипулятора для оптимального перемещения объекта по прямой в пространстве / А.И. Бохонский, А.И. Рыжков // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. Орёл: ФГБОУ ВО Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева. – 2018. – №3(329). – С.29-35.
76. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. / О.Н. Цубербиллер. – М.: Наука, 1964. – 336 с.
77. Бохонский А.И. Оптимальное управление манипулятором с упругой рукой / А.И. Бохонский, А.И. Рыжков // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. Орёл: ФГБОУ ВО Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева. – 2018. – №4-1(330). – С.73-79.
78. Светлицкий В.А. Сборник задач по теории колебаний / В.А. Светлицкий. – Москва: Изд-во «Высш. школа», 1973. – 456 с.
79. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. / А.Г. Бутковский. – Москва: Изд-во «Наука», 1975. – 568 с.
80. Бохонский, А.И. Экспериментальная проверка оптимального управления переносным движением деформируемого объекта / А.И. Бохонский,

- М.М. Майстришин, Э.О. Балаканов, И.В. Гусаков/ Оптимизация производственных процессов: сб. науч. тр. – 2010. – Вып. 12. – С. 66–72.
81. Бохонский А.И. Оптимальное вращение космического корабля / А.И. Бохонский // Вісник СевНТУ. Севастополь: изд-во СевНТУ. – 2012. – №132. – С.8-13.
82. Бохонский А.И. Проектирование упругого объекта для исследования оптимального переносного вращательного движения вокруг неподвижной оси / А.И. Бохонский, А.И. Рыжков // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. Орёл: ФГБОУ ВО Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева. – 2019. – № 4-2(336). – С. 101-106
83. Шевченко Ф.Л. Строительная механика / Ф.Л. Шевченко. – Донецк: ДПУ, 2000. – 292 с.
84. Бохонский А.И. Проектирование манипуляторов минимальной массы с компенсацией перемещений / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, А.И. Рыжков // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. Орёл: ФГБОУ ВО Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева. – 2020. – №4-2(342). – С. 169-179.
85. Бохонский А.И. Моделирование оптимального переносного вращательного движения упругой системы / А.И. Бохонский, М.М. Майстришин, А.И. Рыжков // Автоматизация и измерения в машино-приборостроении Севастополь: ФГАОУ ВО «СевГУ», 2019. – № 4 (8). – С. 40-48.
86. Вожжов А.А. Программное управление технологическим оборудованием / А.А. Вожжов, М.М. Майстришин, А.И. Рыжков. – Севастополь: ФГАОУ ВО СевГУ, 2020. – 80 с.
87. Бохонский А.И. Экспериментальная проверка оптимального вращения упругого стержня / А.И. Бохонский, М.М. Майстришин, А.И. Рыжков // Автоматизация и измерения в машино-приборостроении Севастополь: ФГАОУ ВО «СевГУ». – 2020. – № 2(10). – С. 3-16.

88. Kodama H. A Scheme for Three-Dimensional Display by Automatic Fabrication of Three-Dimensional Model / H. Kodama// IECE, – Vol. J64-C, №. 4, –1981.–P. 237-241.
89. Kodama H. Automatic Method for Fabricating a Three-Dimensional Plastic Model with Photo-Hardening Polymer / H. Kodama // Review of Scientific Instruments, – Vol. 52, №. 11, –1981. –P. 1770-1773.
90. Herbert A.J. Solid Object Generation / A.J. Herbert // Journal of Applied Photographic Engineering, –№ 8(4), –1982. – P. 185-188.
91. Prinz F.B., Atwood C.L., Aubin R.F. Rapid prototyping in Europe and Japan, International Technology Research Inst., Baltimore, Report ISBN 1-883712-44-0, 1997.
92. Wohlers T., Gornet T. History of Additive Manufacturing // <http://wohlersassociates.com/>. 2014. URL: <http://wohlersassociates.com/history2014.pdf> (дата обращения: 20.Февраль.2016).
93. Ковалевский С.В. Развитие аддитивных технологий на основе послойного выращивания деталей машин / С.В.Ковалевский, С.Н. Гончарова // Научный вестник ДГМА. –2015. –№3 (18Е). – С. 149-154.
94. Мешков В.В. Автоматизированная система управления генеративным технологическим процессом по тепловому состоянию затвердевающего слоя: дис... канд. техн. наук: 05.13.07 Севастопольский национальный технический ун-т. – Севастополь, 2007. – 180 с.
95. Патент РФ № 2655118 23.05.2018 Якунин В.А., Рыжков А.И. Способ изготовления вентиляционной панели, экранирующей электромагнитное излучение // Патент России № 2655118: МПК В29С 64/118, В33У 10/00, В29С31/00/; заявитель и патентообладатель Общество с ограниченной ответственностью «Группа Компаний «ЗАИН». – № 2017119733; заявл. 06.06.2017; опубл. 23.05.2018 Бюл. № 15. – 12с.
96. UK Intellectual Property Office Patent Informatics Team. 3D printind. A patent overview // <https://www.gov.uk/government/organisations/intellectual-property-office>. 2013. URL: https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/445232/

- 3D_Printing_Report.pdf https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/445232/3D_Printing_Report.pdf (дата обращения: 2 декабря 2015).
97. Gridlogics Technologies Pvt Ltd. 3D Printing Technology Insight Report, Gridlogics Technologies Pvt Ltd, Пимпри-Чинчwad, Доклад 2014.
 98. Дежина И.Г., Пономорев А.К., Фролов А.С., Зорин Д.Н. Новые производственные технологии // www.skoltech.ru. 2015. URL: http://www.skoltech.ru/app/data/uploads/2014/02/Doklad-PPT_for-publishing-4.pdf (дата обращения: 25 февраля 2016).
 99. Богуцкий Б.В. Анализ схем движения в современных FDM 3D-принтерах / Б.В. Богуцкий, С.М. Братан, В.Б. Богуцкий // Ученые записки Крымского инженерно-педагогического университета, –2016. –№.1(52), –С.79-86.
 100. Юрченко В.В., Кубриков М.В. Анализ кинематических схем движения экструдера 3D-принтера / В.В.Юрченко, М.В.Кубриков // Актуальные проблемы авиации и космонавтики, –2017. – С. 207-208.
 101. Патент (заявка) US 2015/0298393A1, МПК В29С 67/00. 3D printer system having a rotatable platform, metal flake filament, multiple heaters, and modularity / Суарес Т.У. заявл. 21.04.2015; опубл. 22.10.2015.
 102. Патент US 11179884, МПК G05В 15/02 . Methods for incremental 3D printing and 3D printing arbitrary wireframe meshes / Гимбретьер Ф., Маршнер С.Р., [и др.] заявл. 14.04.2017; опубл. 23.11.2021.
 103. Патент CN 204322535U , МПК В29С 67/00. Polar-coordinate 3D printer / Гу Л., Хуа Ш., Ли Х. [и др.], заявл. 22.12.2014; опубл. 13.05.2015.
 104. Патент (заявка) WO 2014092651, МПК В29С 67/00. A 3D printer with a controllable rotary surface and method for 3D printing with controllable rotary surface / Fang K. B., Kongsuphol P., Pui T. S. [и др.], заявл. 12.12.2013; опубл. 19.06.2014.
 105. Патент CN 206623407U, МПК В29С 64/227. Delta type 3D printer / Liao Y., Liu C., She Z. [et al], заявл. 30.03.2017; опубл. 10.11.2017.
 106. Патент (заявка) WO 2016033286, МПК В29С 67/00. A 3D printer / Вое-Wiegaard T., Chappel A., Fosker H., [et al], заявл. 27.08.2015; опубл. 03.03.2016.

107. Патент CN 106696251, МПК В29С 64/106. High-precision FDM 3D printer/ Lan B., ZHOU D., заявл. 29.12.2016; опубл. 24.05.2017.
108. Патент CN 106414025 , МПК В29С 47/06. System, method and apparatus for 3D printing/ Korn S., заявл. 30.03.2015; опубл. 15.02.2017.
109. // 3dprint.com: [сайт]. [2016]. URL: <https://3dprint.com/127688/autodesk-project-escher/> (дата обращения: 28 июля 2018).
110. Патент WO 2016016887, МПК В29С 67/00. Method and system for fabrication of custom-made molds and concrete-architectural components / Berman R., заявл. 28.07.2015; опубл. 04.02.2016
111. ГОСТ Р 58837-2020. Автомобильные транспортные средства. Системы автоматизированного управления. Общие принципы проектирования [Текст]; Введ. с 01.04.2021 – Москва: Стандартинформ, 2020. – 16 с.
112. Хубка В. Теория технических систем. / В. Хубка. – Москва: Мир, 1987. – 208 с.
113. Кравец В.Н., Хорычев А.А. Основы системного подхода к проектированию автомобиля / В.Н.Кравец, А.А.Хорычев // Будущее технической науки Нижегородского региона. – Н.Новгород. –2003. –С. 135-137.
114. Патент US 6426459, МПК Н05К 9/00. EMI shielding vent panel for high volume applications / Mitchell J. , заявл. 20.07.2000; опубл. 30.07.2002.
115. Патент US 20050132885, МПК В01D 46/00. EMI air filter / Arnold R., Gabower J., Zarganis J., заявл. 01.12.2004; опубл. 23.06.2005.
116. Патент US 6252161, МПК Н05К 9/00. EMI shielding ventilation structure / Hailey J., Worley R., заявл. 22.11.1999; опубл. 26.06.2001.
117. Патент WO 2015189661, МПК В29С 67/00. Extruder for fused filament fabrication 3D printer / Hishiki T., заявл. 12.06.2014; опубл. 17.12.2015.
118. Патент US 6870092, МПК Н05К 9/00. Methods and apparatus for EMI shielding / Lambert M., ; McFadden J., Van H.P., заявл. 04.12.2002; опубл. 22.03.2005.
119. // Arduino.ru: [сайт]. [2018]. URL: <http://arduino.ru/Hardware/ArduinoBoardMega2560> (дата обращения: 21 декабря 2018).

120. // Texas Instruments: [сайт]. [2018]. URL: <http://www.ti.com/product/DRV8825> (дата обращения: 21 декабря 2018).
121. // banggood.com: [сайт]. [2018]. URL: https://www.banggood.com/МК2В-Heat-Bed-PCB-Heatbed-For-3D-Printer-RepRap-Mendel-p-937404.html?cur_warehouse=CN (дата обращения: 29 ноября 2018).
122. // Element3d.ru: [сайт]. [2018]. URL: <https://www.element3d.ru/shop/abs-plastik/abs-800-g-naturalnyu/> (дата обращения: 29 декабря 2018).
123. // Stratasys.com: [сайт]. [2018]. URL: <https://store.stratasys.com/stratasysstorefront/stratasys/en/Materials-%26-Service-Consumables/NA/Flavors/Nylon-12/p/P012> (дата обращения: 29 ноября 2018).
124. // 3ddevice.com.ua: [сайт]. [2019]. URL: <https://3ddevice.com.ua/product/tokoprovodjashhij-abs-plastik/> (дата обращения: 22 мая 2017).
125. // Repetier.com: [сайт]. [2019]. URL: <https://www.repetier.com/download-now/> (дата обращения: 22 августа 2016).
126. // Prusa3d.com: [сайт]. [2019]. URL: <https://shop.prusa3d.com/forum/general-discussion-announcements-and-releases-f61/slic3r-prusa-edition-1-41-0-final-release--t23511.html> (дата обращения: 15 сентября 2017).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

(19) **RU** ⁽¹¹⁾ **2 655 118** ⁽¹³⁾ **C1**

(51) МПК

[B29C 64/118 \(2017.01\)](#)

[B33Y 10/00 \(2015.01\)](#)

[B29C 31/00 \(2006.01\)](#)

(52) СПК

[B29C 64/118 \(2018.01\)](#)

[B33Y 10/00 \(2018.01\)](#)

[B29C 31/00 \(2018.01\)](#)

(12) ОПИСАНИЕ ИЗОБРЕТЕНИЯ К ПАТЕНТУ

(21)(22) Заявка: [2017119733](#), 06.06.2017

(24) Дата начала отсчета срока действия патента:
06.06.2017

Дата регистрации:
23.05.2018

Приоритет(ы):
(22) Дата подачи заявки: 06.06.2017

(45) Опубликовано: [23.05.2018](#) Бюл. № [15](#)

(56) Список документов, цитированных в отчете о поиске: US 6870092 B2, 22.03.2005. US 20170129176 A1, 11.05.2017. RU 169634 U1, 27.03.2017.

Адрес для переписки:
125430, Москва, ул. Митинская, 16, оф.
704Б, ООО "Группа Компаний "ЗАИН",
Якунину В.А.

(72) Автор(ы):

**Якунин Валерий Анатольевич (RU),
Рыжков Александр Игоревич (RU)**

(73) Патентообладатель(и):

**Общество с ограниченной
ответственностью "Группа Компаний
"ЗАИН" (RU)**

(54) СПОСОБ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ВЕНТИЛЯЦИОННОЙ ПАНЕЛИ, ЭКРАНИРУЮЩЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

(57) Реферат:

Изобретение относится к области радиоаппаратостроения и может использоваться при конструировании устройств вентиляции радиоэлектронной аппаратуры. Способ изготовления из термопластичного полимерного материала в виде филамента вентиляционной панели, экранирующей ЭМИ, имеющей множество вентиляционных отверстий, разделенных перемычками, размером меньше диаметра отверстий, включающий изготовление панели из термопластичного полимерного материала, металлизацию всех ограничивающих панель поверхностей металлом с высокой электропроводностью, изготовление рамы, установку металлизированной панели в раму из электропроводящего материала, при этом изготовление панели выполняется на 3D-принтере, имеющем приводимые электродвигателями печатающую головку и стол, при подаче филамента из термопластичного полимерного материала в печатающую головку с экструдером, нагреве филамента в экструдере до температуры плавления, экструдировании расплавленного материала филамента через сопло экструдера, послойном нанесении экструдированного расплавленного материала на поверхность рабочего стола 3D-принтера, при движениях печатающей головки и стола с помощью электроприводов, управляемых контроллером, до получения заданной толщины вентиляционной панели с множеством вентиляционных отверстий,

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

**ОБЩЕСТВО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТЬЮ
«Группа Компаний «ЗАИН»
(ООО «ГК «ЗАИН»)**

125430, г. Москва, ул. Митинская, д.16, оф. 704Б, тел.: 8(985) 765-03-08, e-mail: zain@zain-llc.ru

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор ООО «ГК «ЗАИН»

В.А. Якунин

«20» февраля 2020 г.

АКТ

о практическом внедрении (использовании)

изобретения по патенту *RU* № 2655118, полученном на основании
результатов исследований по диссертационной работе Рыжкова А.И.

г. Москва

«20» февраля 2020г.

Мы, нижеподписавшиеся специалисты ООО "ГК "ЗАИН", подтверждаем, что признаки пунктов 1 и 5 формулы изобретения авторов Якунина Валерия Анатольевича и Рыжкова Александра Игоревича *RU* № 2655118 "Способ изготовления вентиляционной панели, экранирующей электромагнитное излучение" с приоритетом от 06.06.2017 (публикация 23.05.2018), использованы в технологическом процессе изготовления вентиляционных панелей для изделий НРВТ.466216.011 на *FDM 3D*-принтере, работающем в декартовой системе координат, имеющем одну печатающую головку. В качестве материала использован электропроводящий полимер, ранее не применявшийся для производства данного типа изделий путем 3D-печати.

Использование изобретения в условиях мелкосерийного производства привело к снижению трудоемкости изготовления экранирующих электромагнитное излучение вентиляционных панелей различных конструкций из термопластичного полимерного материала и повышению точности изготовления вентиляционных отверстий.

Директор

Начальник конструкторского отдела



В.А. Якунин

К.С. Малеванный

ПРИЛОЖЕНИЕ В

2

УДК 681.58
П78

Р е ц е н з е н т ы:

С.М. Братан – д.т.н., профессор, заведующий кафедры «Технология машиностроения»

Е.В. Пашков – д.т.н., профессор, советник по учебной работе при ректорате СевГУ

Научный редактор: А.И. Бохонский, д.т.н., профессор.

Составители: Вожжов А.А., Майстришин М.М., Рыжков А.И.

П78 Программное управление оборудованием: учебное пособие (лабораторный практикум) к лабораторным работам по дисциплинам «Промышленная робототехника» для студентов очной формы обучения специальности 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», «Программное управление технологическим оборудованием» для студентов очной формы обучения специальности 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств» / Разраб. А.А. Вожжов, М.М. Майстришин, А.И. Рыжков. – Севастополь: СевГУ, 2020. – 80 с.

ISBN 978-5-6045525-8-2

Учебное пособие предназначено для учебно-методического обеспечения дисциплины «Промышленная робототехника» и «Программное управление технологическим оборудованием». Целью учебного пособия является оказание помощи студентам при выполнении лабораторных работ.

В качестве лабораторных стендов представлены: учебный робото-технологический комплекс (РТК) токарной обработки на базе станка CONCEPT TURN 55, робот - Mitsubishi RV-1A, мехатронная пневматическая система фирмы «FESTO».

УДК 681.58

Учебное пособие рассмотрено и утверждено на заседании кафедры «Приборные системы и автоматизация технологических процессов», протокол № 2 от 25.09.2020 г.

Рекомендовано в качестве учебного пособия для студентов очной формы обучения специальностей 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств» и 15.03.06 «Мехатроника и робототехника» ученым советом Политехнического института СевГУ, протокол № 5 от 15.10.2020 г.

Подписано в печать 17.12.20 г. Изд. № 49/2020. Зак. 34/2020. Тираж 500 экз.

Объем 5 п.л. Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 4,9.

Формат бумаги 60 x 84 1/16

РИИЦМ ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

ISBN 978-5-6045525-8-2



© Вожжов А.А., Майстришин М.М.,
Рыжков А.И., 2020

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2020

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

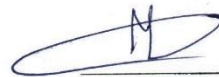
АКТ

о результатах экспериментальных исследований Рыжкова Александра Игоревича оптимального переносного движения упругого объекта

В специализированной учебной лаборатории кафедры «Приборостроительные системы и автоматизация технологических процессов» Севастопольского государственного университета (г. Севастополь, ул. Гоголя, 14 ауд. 137), в присутствии комиссии (председателя заведующего кафедрой ПСАТП, к.т.н., доцента Филиповича О.В. и членов к.т.н., доцента Майстришина М.М., директора Политехнического института к.т.н., доцента Головина В.И.) экспериментально подтверждены результаты моделирования оптимального управления вращением упругого консольного стержня с распределенной массой по длине.

С использованием робота Mitsubishi MELFA RV1-A-512, разработанной программы на языке MELFA BASIC IV, включающей функции OVRD и ACCEL, при настройке исходных параметров реализовано релейного оптимального управления в виде переносного углового ускорения вращением стержня вокруг неподвижной оси. При повороте стержня на 90° за время, равное четырем периодам первого тона собственных колебаний стержня, из исходного состояния абсолютного покоя в конечное состояние покоя, регистрировалось отсутствие колебаний объекта, т.е. наблюдался (с некоторой допустимой погрешностью) абсолютный покой как сумма переносного и относительного покоя в конце движения.

Председатель комиссии
Зав. кафедрой ПСАТП

 / О.В. Филипович /

Члены комиссии:

Директор Политехнического института


 / В.И. Головин /

Доцент кафедры ПСАТП

 / М.М. Майстришин /

Подписи О.В. Филиповича, В.И. Головина, М.М. Майстришина удостоверяю.

Ученый секретарь СевГУ

 / С.П. Строкина /



ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Пакеты прикладных программ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

RU

2022617104

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
(12) ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства): <u>2022617104</u>	Автор: Рыжков Александр Игоревич (RU)
Дата регистрации: 18.04.2022	Правообладатель: Рыжков Александр Игоревич (RU)
Номер и дата поступления заявки: 2022616041 06.04.2022	
Дата публикации: <u>18.04.2022</u>	
Контактные реквизиты: ryzhkoy2206@mail.ru	

Название программы для ЭВМ:

Моделирование динамики вращения консольного элемента конечной жесткости

Реферат:

Программа предназначена для моделирования динамического поведения объекта в виде упругого консольного стержня с распределенной по длине массой при переносных вращательных угловых ускорениях типа «разгон-торможение» и последующего анализа полученных данных об ускорении конца стержня из натурального эксперимента путём сравнения их с результатами моделирования. В программе учитывается первая мода изгибных колебаний, возникающая при повороте на заданный угол упругого консольного стержня. Абсолютное движение конца стержня показано как сумма его переносного и относительного движений. Функция переносного углового ускорения относится к типу «разгон-торможение», ее вид уточняется исходя из граничных условий, частоты и периода собственных колебаний упругого консольного стержня. Время движения определяется как один из корней системы трансцендентных уравнений (моментных соотношений) - относительного движения конца стержня и его относительной скорости. В программу вводится массив данных эксперимента (значения абсолютных ускорений конца упругого стержня для дискретных моментов времени), по способу наименьших квадратов восстанавливается функция абсолютного ускорения конца стержня. Входными данными для программы являются начальное состояние покоя (переносные перемещение и скорость в начальный момент времени равны нулю) упругого объекта и его конечное состояние покоя (цель движения - угол поворота и равная нулю переносная угловая скорость), длина стержня, его момент инерции, плотность материала, модуль упругости, массив экспериментальных данных об ускорении конца стержня в процессе реализации сконструированного переносного углового ускорения. В качестве выходных данных выступают: функции переносных углового ускорения, угловой скорости и угла поворота упругого консольного стержня; функции относительных перемещений, скорости и ускорения конца упругого консольного стержня; функции абсолютного ускорения конца стержня, полученные в результате моделирования и обработки данных эксперимента. Тип ЭВМ: IBM PC-совмест.ПК (на базе платформы Intel, AMD). ОС: Windows XP/7/8/10.

Язык программирования: Maple

Объем программы для ЭВМ: 286 КБ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2022617104

Моделирование динамики вращения консольного
элемента конечной жесткостиПравообладатель: **Рыжков Александр Игоревич (RU)**Автор(ы): **Рыжков Александр Игоревич (RU)**Заявка № **2022616041**Дата поступления **06 апреля 2022 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **18 апреля 2022 г.**Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

1. Универсальные аналитические зависимости. Вычисление энергии

> restart; L := 1 : T := 1 :

> # Вычисление интеграла энергии частный случай (L:=1: T:=1;)

> Ue := 2 L T⁻ⁿ⁻² (n + 2) (T - 2t)ⁿ;

$$Ue := 2 (n + 2) (1 - 2t)^n$$

> Ve := - $\frac{L (n + 2) ((T - 2t)^{n+1} T^{-n-1} - 1)}{T (n + 1)}$; Se :=

$$\frac{1}{2} \frac{(T^{-n-1} (T - 2t)^{n+2} + 2tn + 4t - T) L}{T (n + 1)}; J := 2$$

· simplify(Ue·Ve);

$$Ve := - \frac{(n + 2) ((1 - 2t)^{n+1} - 1)}{n + 1}$$

$$Se := \frac{1}{2} \frac{(1 - 2t)^{n+2} + 2tn + 4t - 1}{n + 1}$$

$$J := - \frac{4 (n + 2)^2 (-(1 - 2t)^n + (1 - 2t)^{1+2n})}{n + 1}$$

> # J-подинтегральное выражение(вычисляется по слагаемым)

>

> J1 := int(2 (1 - 2t)²ⁿ t, t); J0 := int((1 - 2t)ⁿ, t); J2 := -int((1 - 2t)²ⁿ, t);

$$J1 := - \frac{1}{4} \frac{(1 - 2t)^{1+2n} (4tn + 2t + 1)}{(n + 1) (1 + 2n)}$$

$$J0 := - \frac{1}{2} \frac{(1 - 2t)^{n+1}}{n + 1}$$

$$J2 := \frac{1}{2} \frac{(1 - 2t)^{1+2n}}{1 + 2n}$$

> K := $\frac{4 \cdot (n + 2)^2}{n + 1}$; JJ := (J1 + J2 + J0); JJ := simplify(JJ);

$$K := \frac{4 (n + 2)^2}{n + 1}$$

$$JJ := - \frac{1}{4} \frac{(1 - 2t)^{1+2n} (4tn + 2t + 1)}{(n + 1) (1 + 2n)} + \frac{1}{2} \frac{(1 - 2t)^{1+2n}}{1 + 2n}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{(1 - 2t)^{n+1}}{n + 1}$$

$$JJ := - \frac{1}{4} \frac{2 (1 - 2t)^{1+2n} t - (1 - 2t)^{1+2n} + 2 (1 - 2t)^{n+1}}{n + 1}$$

> # Использование формулы Ньютона Лейбника

> t := 0 : A := JJ; t := $\frac{T}{2}$: B := JJ;

$$A := - \frac{1}{4 (n + 1)}$$

$$B := 0$$

> # Интеграл энергии с после вычисления

> c := B - A; c := c·K;

$$c := \frac{1}{4 (n + 1)}$$

$$c := \frac{(n + 2)^2}{(n + 1)^2}$$

> # правило Лопитала раскрытия неопределенности для
определения предельного значения энергии

$$c := \frac{\text{diff}((n+2)^2, n)}{\text{diff}((n+1)^2, n)}; c := \frac{\text{diff}((2 \cdot n + 4), n)}{\text{diff}((2 \cdot n + 2), n)};$$

$$c := \frac{2n+4}{2n+2}$$

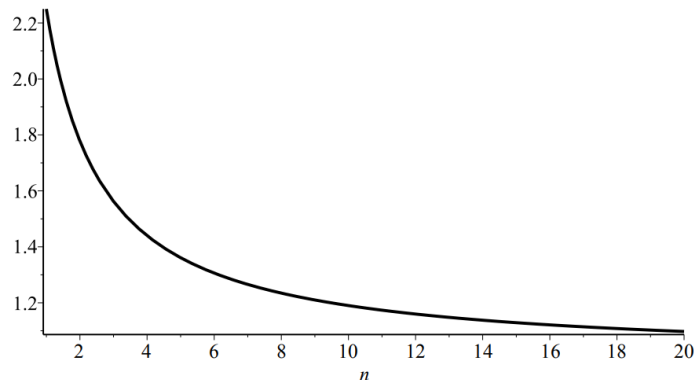
$$c := 1$$

> # Энергия

$$c := \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} :$$

> # Построение графика $c=c(n)$

> `plot({c}, n = 1 ..20, thickness = 2, color = black);`



> # Энергия для различных степеней полинома

> `n := 1 : evalf(c); n := 3 : evalf(c); n := 7 : evalf(c); n := 20 :`
`evalf(c);`

2.250000000

1.562500000

1.265625000

1.097505669

2. Задание и вычисление исходных параметров для эксперимента

> # ЭКСПЕРИМЕНТ

> `restart; # Без учета распределенной массы`

$$c := \frac{3 \cdot E \cdot J}{L^3} : om := \text{sqrt}\left(\frac{C}{M}\right) :$$

$$E := 2.1 \cdot 10^{11} : J := \frac{\text{Pi} \cdot d^4}{64} :$$

> # Массам M задана

$$d := 0.005 : L := 1.05 : gm := 7.8 \cdot 10^3 : M := \text{evalf}\left(\frac{\text{Pi} \cdot d^2}{4} \cdot gm \cdot L\right);$$

$$om := \text{evalf}\left(\text{sqrt}\left(\frac{C}{M}\right)\right); Tl := \text{evalf}\left(\frac{2 \cdot \text{Pi}}{om}\right); T := 2 \cdot Tl;$$

M := 0.1608102740

om := 10.18953554

Tl := 0.6166311784

T := 1.233262357

> `g := 9.81 : P := M \cdot g;`

P := 1.577548788

```

> restart;
  # Определение частоты и периода первого тона только с
  # распределенной массой
> M := L * (Pi * d^2 / 4) * gm : gm := 7.8 * 10^3 :
>
> E := 2.1 * 10^11 : J := (Pi * d^4 / 64) : d := 0.005 : L := 1.05 : evalf(M); m0
:= evalf(M / L);

                                0.1608102740
                                m0 := 0.1531526419

>
> om := evalf((1.875)^2 * sqrt(E * J / (m0 * L^4)));

                                om := 20.68217959

> T1 := evalf(2 * Pi / om);

                                T1 := 0.3037970578

> restart; # С учетом сосредоточенной и распределенной массы

> m0 := 0.1531526419 :
> E := 2.1 * 10^11 : J := (Pi * d^4 / 64) : d := 0.005 : L := 1.05 : gm := 7.8
  * 10^3 : M := evalf((Pi * d^2 / 4) * gm * L);

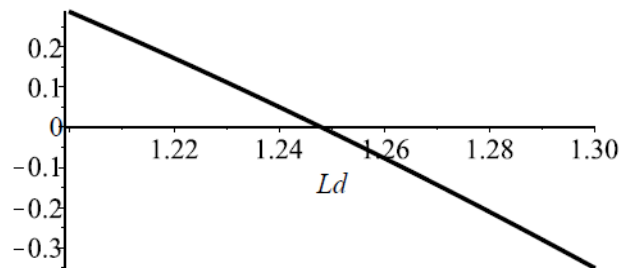
                                M := 0.1608102740

>
> U := cosh(Ld) * cos(Ld) + Ld * (sinh(Ld) * cos(Ld) - cosh(Ld)
  * sin(Ld)) + 1;

                                U := cosh(Ld) cos(Ld) + Ld (sinh(Ld) cos(Ld) - cosh(Ld) sin(Ld))
                                + 1

> plot(U, Ld = 1.2 .. 1.3, thickness = 2, color = black);

```



```

> Ld := 1.247917410; k := Ld / L;

                                Ld := 1.247917410
                                k := 1.188492771

> om1 := evalf((Ld / L)^2 * sqrt(E * J / (m0))); T1 := evalf(2 * Pi / om1); T := 2
  * T1;

```

```

om1 := 9.161476002
T1 := 0.6858267497
T := 1.371653499

>
> restart;
  # Влияние исходных данных на частоту (период) первого
  тона стержня с распределенной массой

> M := L * (Pi * d^2) / 4 * gm : gm := 7.8 * 10^3 :
>
> E := 2.1 * 10^11 : J := (Pi * d^4) / 64 : d := 0.005 : L := 1.05 : evalf(M); m0
:= evalf(M / L);

0.1608102740
m0 := 0.1531526419

> om := evalf((4.694)^2 * sqrt(E * J / (m0 * L^4))); T2 := evalf(2 * Pi / om); om
:= evalf((7.855)^2 * sqrt(E * J / (m0 * L^4))); T3 := evalf(2 * Pi / om);

om := 129.6223621
T2 := 0.04847300424
om := 362.9828779
T3 := 0.01730986691

> om := evalf((1.875)^2 * sqrt(E * J / (m0 * L^4)));

om := 20.68217959

> T1 := evalf(2 * Pi / om);

T1 := 0.3037970578

> om := evalf((1.875)^2 * sqrt(E * J / (m0 * L^4))); #это для расчета k

om := 20.68217959

> J := evalf(0.95 * J);

J := 2.914563497 10^-11

> om := evalf((1.875)^2 * sqrt(E * J / (m0 * L^4)));

om := 20.15849511

> T1 := evalf(2 * Pi / om);

T1 := 0.3116892046

> J := evalf(1.05 * J);

J := 3.060291672 10^-11

> om := evalf((1.875)^2 * sqrt(E * J / (m0 * L^4)));

om := 20.65631069

> T1 := evalf(2 * Pi / om);

T1 := 0.3041775176

> E := 2. * 10^11 :
>

T1 := 0.3037970578

```

```

> om := evalf( (1.875)^2 * sqrt( (E * J) / (m0 * L^4) ) );
                                                    om := 20.15849511
> Tl := evalf( (2 * Pi) / om );
                                                    Tl := 0.3116892046
> (0.3112993496 - 0.3037970578) / 0.3037970578 * 100;
                                                    2.469507721
> restart;
> Ee := E * sin(p * t); Ome := int(Ee, t) + C1; Fe := int(Ome, t) + C2;
                                                    Ee := E sin(p t)
                                                    Ome := - (E cos(p t)) / p + C1
                                                    Fe := - (E sin(p t)) / p^2 + C1 t + C2
> t := 0 : S1 := Fe = 0; t := T : S2 := Ome = 0; S3 := Fe - Fi = 0;
                                                    S1 := C2 = 0
                                                    S2 := - (E cos(p T)) / p + C1 = 0
                                                    S3 := - (E sin(p T)) / p^2 + C1 T + C2 - Fi = 0
> solve( {S1, S2, S3}, {C1, C2, E} );
                                                    { C1 = - (Fi p cos(p T)) / (sin(p T) - p cos(p T) T), C2 = 0, E =
                                                    - (Fi p^2) / (sin(p T) - p cos(p T) T) }
> T := (2 * Pi) / p; C1 := (Fi p cos(p T)) / (-sin(p T) + p cos(p T) T); C2 := 0; E
:= (Fi p^2) / (-sin(p T) + p cos(p T) T);
                                                    T := 2 pi / p
                                                    C1 := 1/2 * (Fi p) / pi
                                                    C2 := 0
                                                    E := 1/2 * (Fi p^2) / pi
> t := 't': Ee, Ome, Fe;
                                                    1/2 * (Fi p^2 sin(p t)) / pi
                                                    - 1/2 * (Fi p cos(p t)) / pi + 1/2 * (Fi p) / pi
                                                    - 1/2 * (Fi sin(p t)) / pi + 1/2 * (Fi p t) / pi
> restart;
> S := diff(x(t), t$2) + (k^2) * x(t) = - (1/2) * Fi * p^2 * sin(p * t) / Pi;
> f := {x(t)}: dsolve( {S, x(0) = 0.0, D(x)(0) = 0.0}, f );
                                                    S := d^2/dt^2 x(t) + k^2 x(t) = - 1/2 * (Fi p^2 sin(p t)) / pi

```

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{\sin(kt) Fi p^3}{\pi k (k^2 - p^2)} - \frac{Fi p^2 \sin(pt)}{(2k^2 - 2p^2) \pi}$$

$$> x := \frac{1}{2} \frac{\sin(kt) Fi p^3}{\pi (k^2 - p^2) k} - \frac{Fi p^2 \sin(pt)}{(2k^2 - 2p^2) \pi};$$

$$x := \frac{1}{2} \frac{\sin(kt) Fi p^3}{\pi k (k^2 - p^2)} - \frac{Fi p^2 \sin(pt)}{(2k^2 - 2p^2) \pi}$$

$$> v := \text{diff}(x, t);$$

$$v := \frac{1}{2} \frac{\cos(kt) Fi p^3}{\pi (k^2 - p^2)} - \frac{Fi p^3 \cos(pt)}{(2k^2 - 2p^2) \pi}$$

$$> t := \frac{2 \cdot \text{Pi}}{p} : xT := \text{simplify}(x) = 0; vT := \text{simplify}(v) = 0;$$

$$xT := \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{2k\pi}{p}\right) Fi p^3}{\pi k (k^2 - p^2)} = 0$$

$$vT := \frac{1}{2} \frac{Fi p^3 \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right) - 1\right)}{\pi (k^2 - p^2)} = 0$$

$$> xT := \sin\left(\frac{2k\pi}{p}\right) : vT := \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right) - 1 = 0 :$$

$$> p := \frac{k}{4} : T := \frac{2 \cdot \text{Pi}}{p}; \# \text{уточнить разницу со статьей}$$

$$T := \frac{8\pi}{k}$$

$$> k := 20.68217959; T := \text{evalf}(T); Fi := \frac{\text{Pi}}{2} : A := \frac{Fi \cdot p^2}{2 \cdot \text{Pi}}; k^2; p;$$

$$k := 20.68217959$$

$$T := 1.215188231$$

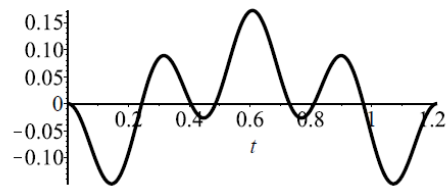
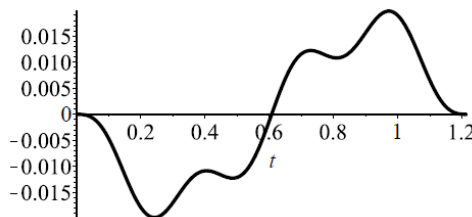
$$A := 6.683633635$$

$$427.7525526$$

$$5.170544898$$

$$> t := 't': x : v :$$

$$> \text{plot}(\{x\}, t = 0..T, \text{thickness} = 2, \text{color} = \text{black}); \text{plot}(\{v\}, t = 0..T, \text{thickness} = 2, \text{color} = \text{black});$$

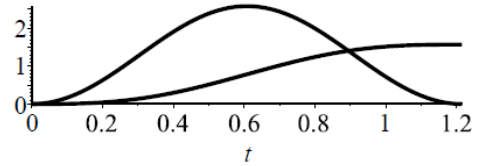
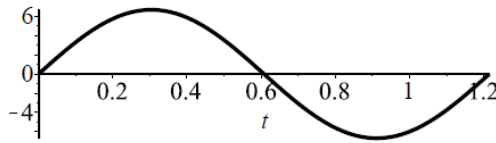


$$> a := \text{diff}(v, t);$$

$$a := -1.782302304 \sin(20.68217959 t) + 0.4455755759 \sin(5.170544898 t)$$

$$> Ee := \frac{1}{2} \frac{Fi p^2 \sin(pt)}{\pi} : Ome := -\frac{1}{2} \frac{Fi p \cos(pt)}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{Fi p}{\pi} : Fe := -\frac{1}{2} \frac{Fi \sin(pt)}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{Fi p t}{\pi} :$$

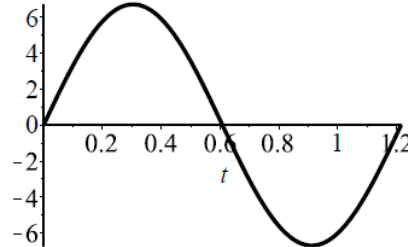
$$> \text{plot}(\{Ee\}, t = 0..T, \text{thickness} = 2, \text{color} = \text{black}); \text{plot}(\{Ome, Fe\}, t = 0..T, \text{thickness} = 2, \text{color} = \text{black});$$



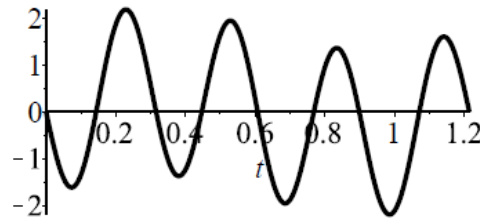
> $Ea := Ee \cdot 1;$

$$Ea := 6.683633635 \sin(5.170544898 t)$$

> $plot(\{Ea\}, t = 0..T, thickness = 2, color = black);$



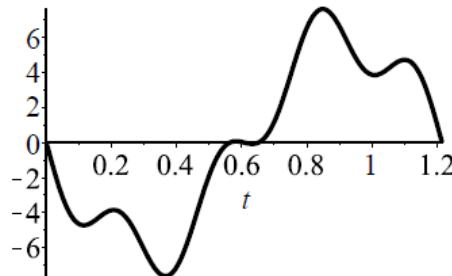
> $plot(\{a\}, t = 0..T, thickness = 2, color = black);$



> $AA := -Ea + a;$

$$AA := -6.238058059 \sin(5.170544898 t) \\ - 1.782302304 \sin(20.68217959 t)$$

> $plot(\{AA\}, t = 0..T, thickness = 2, color = black);$



3. Программа синтеза целенаправленного движения при релейном управлении (ускорении)

> $restart; \# Heaviside$

> $S := diff(x(t), t^2) + k^2 * x(t) = -A * (Heaviside(t) - 2 * Heaviside(t - T/2) + Heaviside(t - T));$

> $f := \{x(t)\}: dsolve(\{S, x(0) = 0., D(x)(0) = 0.\}, f);$

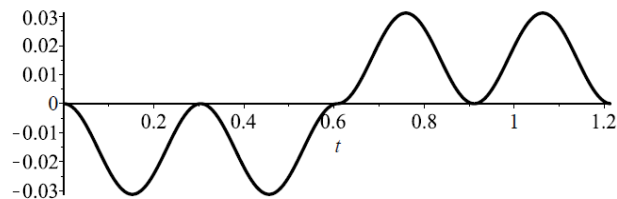
$$S := \frac{d^2}{dt^2} x(t) + k^2 x(t) = -A \left(\text{Heaviside}(t) - 2 \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2} T\right) + \text{Heaviside}(t - T) \right)$$

$$\begin{aligned}
x(t) = & \frac{1}{k^3} \left(\sin(kt) A \left(-3 \operatorname{Dirac}(T) + 4 \operatorname{Dirac}(T) \cos\left(\frac{1}{2} k T\right) \right. \right. \\
& + 2 \operatorname{Heaviside}(-T) \sin\left(\frac{1}{2} k T\right) k - \operatorname{Dirac}(T) \cos(k T) \\
& \left. \left. - \operatorname{Heaviside}(-T) \sin(k T) k \right) \right) \\
& + \frac{\cos(kt) A \operatorname{Heaviside}(-T) \left(-1 + 2 \cos\left(\frac{1}{2} k T\right) - \cos(k T) \right)}{k^2} \\
& + \frac{1}{k^2} \left(A \left(-\operatorname{Heaviside}(t) + 2 \operatorname{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2} T\right) \right. \right. \\
& - 2 \operatorname{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2} T\right) \cos\left(\frac{1}{2} k (-2 t + T)\right) - \operatorname{Heaviside}(t \\
& - T) + \operatorname{Heaviside}(t - T) \cos(k (-t + T)) \\
& \left. \left. + \operatorname{Heaviside}(t) \cos(kt) \right) \right)
\end{aligned}$$

> $k := 20.68 : T := 1.215188231 : A := 6.68 :$

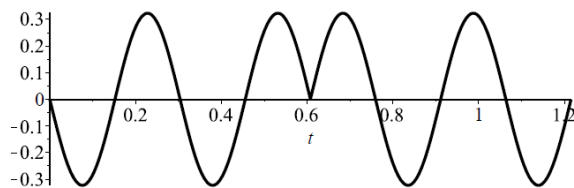
$$\begin{aligned}
x1 := & \frac{1}{k^3} \left(\sin(kt) A \left(-3 \operatorname{Dirac}(T) + 4 \operatorname{Dirac}(T) \cos\left(\frac{1}{2} k T\right) \right. \right. \\
& + 2 \operatorname{Heaviside}(-T) \sin\left(\frac{1}{2} k T\right) k - \operatorname{Dirac}(T) \cos(k T) \\
& \left. \left. - \operatorname{Heaviside}(-T) \sin(k T) k \right) \right) \\
& + \frac{\cos(kt) A \operatorname{Heaviside}(-T) \left(-1 + 2 \cos\left(\frac{1}{2} k T\right) - \cos(k T) \right)}{k^2} \\
& + \frac{1}{k^2} \left(A \left(-\operatorname{Heaviside}(t) + 2 \operatorname{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2} T\right) \right. \right. \\
& - 2 \operatorname{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2} T\right) \cos\left(\frac{1}{2} k (-2 t + T)\right) - \operatorname{Heaviside}(t \\
& - T) + \operatorname{Heaviside}(t - T) \cos(k (-t + T)) \\
& \left. \left. + \operatorname{Heaviside}(t) \cos(kt) \right) \right) :
\end{aligned}$$

> $\text{plot}(\{x1\}, t = 0 .. T, \text{thickness} = 2, \text{color} = \text{black})$



> $v1 := \text{diff}(x1, t) :$

> $\text{plot}(\{v1\}, t = 0 .. T, \text{thickness} = 2, \text{color} = \text{black});$



> $a1 := \text{diff}(v1, t);$


```

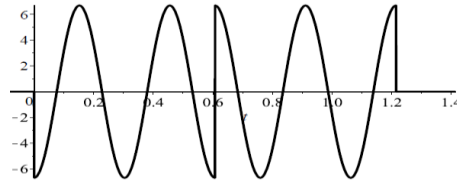
> a1 := -0.01561979730 Dirac(1, t) + 0.03123959460 Dirac(1, t
      - 0.6075941155) - 0.03123959460 Dirac(1, t
      - 0.6075941155) cos(20.68000000 t - 12.56504631)
      + 1.292069633 Dirac(t - 0.6075941155) sin(20.68000000 t
      - 12.56504631) + 13.36000000 Heaviside(t
      - 0.6075941155) cos(20.68000000 t - 12.56504631)
      - 0.01561979730 Dirac(1, t - 1.215188231)
      + 0.01561979730 Dirac(1, t - 1.215188231) cos(20.68 t
      - 25.13009262) - 0.6460348164 Dirac(t
      - 1.215188231) sin(20.68 t - 25.13009262)
      - 6.680000002 Heaviside(t - 1.215188231) cos(20.68 t
      - 25.13009262) + 0.01561979730 Dirac(1, t) cos(20.68 t)
      - 0.6460348164 Dirac(t) sin(20.68 t)
      - 6.680000002 Heaviside(t) cos(20.68 t)

```

```

plot({a1}, t = 0 - 0.2 .. T + 0.2, thickness = 2, color = black);

```



```

> restart;

```

```

> U := A * (Heaviside(t) - 2 * Heaviside(t - T/2) + Heaviside(t - T));
      U := A ( Heaviside(t) - 2 Heaviside(t - 1/2 T) + Heaviside(t - T) )

```

```

> V := int(U, t);

```

$$V := A \left(\text{Heaviside}(t) t - 2 \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2} T\right) t + \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2} T\right) T + \text{Heaviside}(t - T) t - \text{Heaviside}(t - T) T \right)$$

```

> S := int(V, t);

```

$$S := A \left(\frac{1}{2} \text{Heaviside}(t) t^2 - \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2} T\right) t^2 + \frac{1}{4} \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2} T\right) T^2 + T \left(\text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2} T\right) t - \frac{1}{2} \text{Heaviside}\left(t - \frac{1}{2} T\right) T \right) + \frac{1}{2} \text{Heaviside}(t - T) t^2 - \frac{1}{2} \text{Heaviside}(t - T) T^2 - T \left(\text{Heaviside}(t - T) t - \text{Heaviside}(t - T) T \right) \right)$$

```

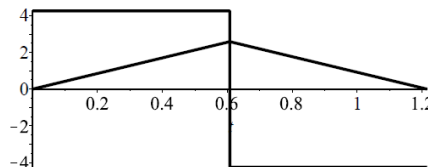
> T := 1.215188231 : F := Pi/2 : A := evalf(4*F/T^2);

```

```

> plot({U}, t = 0 .. T, thickness = 2, color = black);

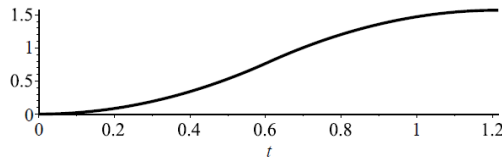
```



```

> plot({S}, t = 0 .. T, thickness = 2, color = black);

```



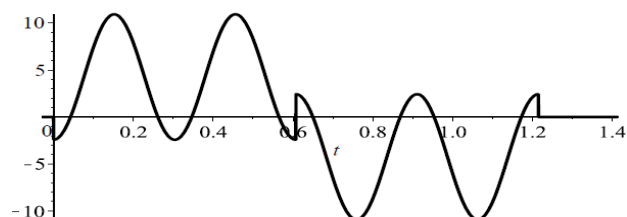
> $AA := U + a1;$

>

$$\begin{aligned}
 AA := & 4.254933324 \text{Heaviside}(t) - 8.509866648 \text{Heaviside}(t \\
 & - 0.6075941155) + 4.254933324 \text{Heaviside}(t - 1.215188231) \\
 & - 0.01561979730 \text{Dirac}(1, t) + 0.03123959460 \text{Dirac}(1, t \\
 & - 0.6075941155) - 0.03123959460 \text{Dirac}(1, t \\
 & - 0.6075941155) \cos(20.68000000 t - 12.56504631) \\
 & + 1.292069633 \text{Dirac}(t - 0.6075941155) \sin(20.68000000 t \\
 & - 12.56504631) + 13.36000000 \text{Heaviside}(t \\
 & - 0.6075941155) \cos(20.68000000 t - 12.56504631) \\
 & - 0.01561979730 \text{Dirac}(1, t - 1.215188231) \\
 & + 0.01561979730 \text{Dirac}(1, t - 1.215188231) \cos(20.68 t \\
 & - 25.13009262) - 0.6460348164 \text{Dirac}(t \\
 & - 1.215188231) \sin(20.68 t - 25.13009262) \\
 & - 6.680000002 \text{Heaviside}(t - 1.215188231) \cos(20.68 t \\
 & - 25.13009262) + 0.01561979730 \text{Dirac}(1, t) \cos(20.68 t) \\
 & - 0.6460348164 \text{Dirac}(t) \sin(20.68 t) \\
 & - 6.680000002 \text{Heaviside}(t) \cos(20.68 t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a1 := & -0.01561979730 \text{Dirac}(1, t) + 0.03123959460 \text{Dirac}(1, t \\
 & - 0.6075941155) - 0.03123959460 \text{Dirac}(1, t \\
 & - 0.6075941155) \cos(20.68000000 t - 12.56504631) \\
 & + 1.292069633 \text{Dirac}(t - 0.6075941155) \sin(20.68000000 t \\
 & - 12.56504631) + 13.36000000 \text{Heaviside}(t \\
 & - 0.6075941155) \cos(20.68000000 t - 12.56504631) \\
 & - 0.01561979730 \text{Dirac}(1, t - 1.215188231) \\
 & + 0.01561979730 \text{Dirac}(1, t - 1.215188231) \cos(20.68 t \\
 & - 25.13009262) - 0.6460348164 \text{Dirac}(t \\
 & - 1.215188231) \sin(20.68 t - 25.13009262) \\
 & - 6.680000002 \text{Heaviside}(t - 1.215188231) \cos(20.68 t \\
 & - 25.13009262) + 0.01561979730 \text{Dirac}(1, t) \cos(20.68 t) \\
 & - 0.6460348164 \text{Dirac}(t) \sin(20.68 t) \\
 & - 6.680000002 \text{Heaviside}(t) \cos(20.68 t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a1 := & -0.01561979730 \text{Dirac}(1, t) + 0.03123959460 \text{Dirac}(1, t \\
 & - 0.6075941155) - 0.03123959460 \text{Dirac}(1, t \\
 & - 0.6075941155) \cos(20.68000000 t - 12.56504631) \\
 & + 1.292069633 \text{Dirac}(t - 0.6075941155) \sin(20.68000000 t \\
 & - 12.56504631) + 13.36000000 \text{Heaviside}(t \\
 & - 0.6075941155) \cos(20.68000000 t - 12.56504631) \\
 & - 0.01561979730 \text{Dirac}(1, t - 1.215188231) \\
 & + 0.01561979730 \text{Dirac}(1, t - 1.215188231) \cos(20.68 t \\
 & - 25.13009262) - 0.6460348164 \text{Dirac}(t \\
 & - 1.215188231) \sin(20.68 t - 25.13009262) \\
 & - 6.680000002 \text{Heaviside}(t - 1.215188231) \cos(20.68 t \\
 & - 25.13009262) + 0.01561979730 \text{Dirac}(1, t) \cos(20.68 t) \\
 & - 0.6460348164 \text{Dirac}(t) \sin(20.68 t) \\
 & - 6.680000002 \text{Heaviside}(t) \cos(20.68 t)
 \end{aligned}$$

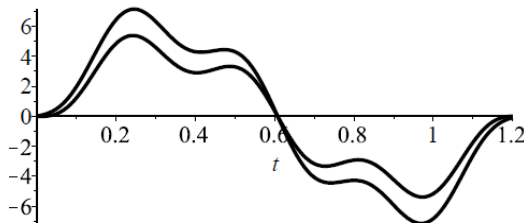


4. Анализ результатов экспериментальных результатов

- ```

> restart;
> T := array[1..21]:
> T[0] := 0:
> for i from 1 to 21 do T[i] := T[i - 1] + 0.055 : od:
> A := array[1..21]:
> A[1] := 0.0263 : A[2] := 2.163386 : A[3] := 4.830532 : A[4]
 := 5.619429 : A[5] := 4.031007 : A[6] := 2.780878 :
> A[7] := 3.393827 : A[8] := 4.00241 : A[9] := 2.871848 : A[10]
 := 0.726969 : A[11] := -1.02229 : A[12] := -2.81269 :
> A[13] := -4.08764 : A[14] := -3.75668 : A[15] := -2.6823 : A[16]
 := -3.04908 : A[17] := -4.39738 : A[18] := -5.85715 :
> A[19] := -4.39738 : A[20] := -1.79982 : A[21] := 0.145602 :
> Kr := 0 : k := 20.68217959 : p := 5.170544898 :
> Способ наименьших квадратов
 Способ наименьших квадратов
> for i from 2 to 21 do Kr := Kr + (A[i] - (-B·sin(5.170544898·T[i])
 - CI·sin(20.68217959·T[i]))^2 : od:
> U1 := diff(Kr, B) :
>
> U3 := diff(Kr, CI) :
> solve({U1, U3}, {CI, B});
 {B = -4.513941200, CI = 1.156579723}
> B := -4.513941200 : CI := 1.156579723 :
> U := -B·sin(5.170544898·t) - CI·sin(20.68217959·t) :
> AA := (6.238058059 sin(5.170544898 t)
 - 1.282302303 sin(20.68217959 t)) :
> # Экспериментальный и теоретический графики абсолютного
 ускорения точки
> plot({U, AA}, t = 0..1.2, thickness = 2, color = black);

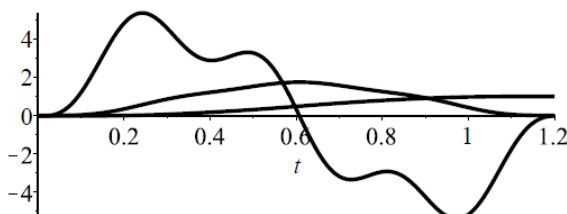
```



- ```

> restart; Скорость и перемещение точки
> U := 4.513941202 sin(5.170544898 t)
  - 1.156579724 sin(20.68217959 t) :
> V := int(U, t) + D1 :
> S := int(V, t) + D2 :
> t := 0 : D1 := 0.841556873345 : D2 := 0 : t := 't': V : S :
> plot({U, V, S}, t = 0..1.2, thickness = 2, color = black);

```



5. Программа опроса акселерометра-гироскопа MPU 6050

```

#include <Wire.h>
#include "Kalman.h"
Kalman kalmanX;
Kalman kalmanY;
uint8_t IMUAddress = 0x68;
/* IMU Data */
int16_t accX;
int16_t accY;
int16_t accZ;
int16_t tempRaw;
int16_t gyroX;
int16_t gyroY;
int16_t gyroZ;
double accXangle; // Angle calculate using the accelerometer
double accYangle;
double temp;
double gyroXangle = 180; // Angle calculate using the gyro
double gyroYangle = 180;
double compAngleX = 180; // Calculate the angle using a Kalman filter
double compAngleY = 180;
double kalAngleX; // Calculate the angle using a Kalman filter
double kalAngleY;
uint32_t timer;
float varVolt = 0.04518; // среднее отклонение
float varProcess = 0.005; // скорость реакции на изменение
float Pc = 0.0;
float G = 0.0;
float P = 1.0;
float Xp = 0.0;
float Zp = 0.0;
float Xe = 0.0;
void setup() {
  Wire.begin();
  Serial.begin(9600);
  i2cWrite(0x6B,0x00); // Disable sleep mode
  kalmanX.setAngle(180); // Set starting angle
  kalmanY.setAngle(180);
  timer = micros();
}
void loop() {
  delay(10);
  /* Update all the values */
  uint8_t* data = i2cRead(0x3B,14);
  accX = ((data[0] << 8) | data[1]);
  accY = ((data[2] << 8) | data[3]);
  accZ = ((data[4] << 8) | data[5]);
  // for Arduino port
float x,y,z;
  x =float(accX)*2/32767*9.8-0.87;
  y =float(accY)*2/32767*9.8+0.2;
  z =float(accZ)*2/32767*9.8-1.5;
  //Serial.println("$");
  Serial.print(y);
  Serial.print(" ");

```

```

//Serial.print(z);
//Serial.print(x);
// Serial.print(" ");
// float filteredY = filter(y);
//Serial.print(filteredY);
Serial.println(" ");
//Serial.print(sqrt((sq(x)+sq(y))));
/*
tempRaw = ((data[6] << 8) | data[7]);
gyroX = ((data[8] << 8) | data[9]);
gyroY = ((data[10] << 8) | data[11]);
gyroZ = ((data[12] << 8) | data[13]);
/* Calculate the anglm based on the different sensors and algorithm /
accYangle = (atan2(accX,accZ)+PI)*RAD_TO_DEG;
accXangle = (atan2(accY,accZ)+PI)*RAD_TO_DEG;
double gyroXrate = (double)gyroX/131.0;
double gyroYrate = -((double)gyroY/131.0);
gyroXangle += kalmanX.getRate()*((double)(micros()-timer)/1000000); // Calculate gyro angle using the unbiased rate
gyroYangle += kalmanY.getRate()*((double)(micros()-timer)/1000000);
kalAngleX=kalmanX.getAngle(accXangle, gyroXrate, (double)(micros()-timer)/1000000); // Calculate the angle using a Kalman filter
kalAngleY = kalmanY.getAngle(accYangle, gyroYrate, (double)(micros()-timer)/1000000);
timer = micros();
/*Serial.println();
Serial.print("X:");
Serial.print(kalAngleX,0);
Serial.print(" ");
Serial.print("Y:");
Serial.print(kalAngleY,0);
Serial.println(" "); */
// The accelerometer's maximum samples rate is 1kHz
}
void i2cWrite(uint8_t registerAddress, uint8_t data){
Wire.beginTransmission(IMUAddress);
Wire.write(registerAddress);
Wire.write(data);
Wire.endTransmission(); // Send stop
}
uint8_t* i2cRead(uint8_t registerAddress, uint8_t nbytes) {
uint8_t data[nbytes];
Wire.beginTransmission(IMUAddress);
Wire.write(registerAddress);
Wire.endTransmission(false); // Don't release the bus
Wire.requestFrom(IMUAddress, nbytes); // Send a repeated start and then release the bus after reading
for(uint8_t i = 0; i < nbytes; i++)
data [i]= Wire.read();
return data;
}
float filter(float val) { //функция фильтрации
Pc = P + varProcess;
G = Pc/(Pc + varVolt);
P = (1-G)*Pc;
Xp = Xe;
Zp = Xp;
Xe = G*(val-Zp)+Xp; // "фильтрованное" значение
return(Xe);
}

```

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ЭКРАНИРУЮЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ВЕНТИЛЯЦИОННЫХ ПАНЕЛЕЙ ПУТЕМ 3D-ПЕЧАТИ

Возникшие в конце XX века аддитивные технологии [88-92] активно внедряются в машино-, прибо-, космо-, и кораблестроение. Для реализации технологических операций используются манипуляторы; вместо схвата, как правило, устанавливается приспособление, подающее материал в заданные точки пространства. Траектория перемещения приспособления определяет форму изделия, а точность её воспроизведения манипулятором, в соответствии с программой, определяет точность изготовления и качество формируемого поверхностного слоя. Процесс печати должен учитывать как структуру 3D-принтера, так и участие его элементов конечной жесткости, что накладывает ограничения на скоростные режимы работы, превышение которых сопряжено со снижением точности позиционирования элементов 3D-принтера и, как результат, снижением качества изделия, вплоть до брака.

1. Аддитивные технологии

В аддитивных технологиях [93] используются программные пакеты для трехмерного моделирования: CATIA, SolidWorks, Pro/ENGINEER, 3DsMax, Zbrush, Blender и другие.

Актуальны задачи, связанные с обеспечением скоростных режимов подачи и управлением изменением агрегатного состояния материала [94]. Формирование объектов должно выполняться по программам без использования форм для отливки. Аддитивное производство требует программной составляющей и управления с помощью компьютера с заданием формы конечных изделий цифровыми моделями.

Аддитивный технологический процесс послойного синтеза детали из полимерного материала осуществляется в результате согласованных действий элементов системы: вращения валов приводов исполнительных органов, нагрева элементов до необходимой для трансформированная материала температуры, управляющих воздействий контроллера и его взаимодействия с элементами 3D-принтера, обусловленных показаниями датчиков.

Корпуса электронных аппаратов, выпускаемых в мелкосерийном и единичном производстве, должны обеспечивать доступ воздуха для вентиляции и охлаждения внутренних элементов, избыточное выделение тепла на которых может привести к выходу из строя всего агрегата. В ряде случаев также необходима помехозащищенность и защита информации. В единичном и мелкосерийном производстве затратным и трудоемким процессом является изготовление сотовых структур со множеством отверстий для вентиляционных и экранирующих электромагнитное излучение (ЭМИ) панелей, обеспечивающих доступ воздуха внутрь корпусов электрических аппаратов. При этом заданный уровень экранирования должен составлять не менее 40 дБ [95].

В Приложении Е исследовано использование технологии FDM 3D-печати для реализации процесса изготовления вентиляционных панелей с отверстиями.

2. Обобщенная модель функционирования управляемых технических систем

Технические установки, функционирование которых сопряжено с перемещением их элементов с целью воздействия на материал или заготовку в определенных программой точках пространства, представляют собой сложные системы. При моделировании динамики целенаправленного движения объектов, входящих в состав таких установок и содержащих упругие элементы, возникает необходимость выработки подхода к декомпозиции сложных систем.

Распространена классификация аддитивных технологий, предложенная организацией «American Society for Testing and Materials» (ASTM) [64].

Таблица 1 – Технологии 3D-печати

№ п/п	Год появления	Английское название	Русское название
1	1991	Fused deposition modeling	Моделирование методом наплавления
2		Solid ground curing	Метод послойного уплотнения
3		Laminated object manufacturing	Метод послойного формирования моделей из листового материала
4	1992	Selective laser sintering	Метод селективного лазерного спекания
5	1993	Direct shell production casting	Литье с прямым изготовлением оболочковых форм
6	1996	Ballistic particle manufacturing	Распыление термопластов
7	1997	Laser additive manufacturing	Лазерное аддитивное производство
8	1998	Laser engineered net shaping	Метод формирования лазером
9	1999	Controlled metal buildup	Управляемое сплавление металла с помощью лазерного нагрева
10		Selective laser melting	Метод послойного лазерного плавления металлопорошковых композиций
11	2000	Direct metal deposition	Метод направленного нанесения металла
12	2001	Digital light processing	Метод цифровой обработки светом
13	2007	Electronic beam melting	Метод электронно-лучевой плавки

С 2000-х годов число патентов, охватывающих область 3D-печати и аддитивных технологий, начала стремительно расти [96-98].

В настоящее время не существует единой классификации как технологий аддитивного производства, так и устройств, реализующих 3D-печать [64]. Известно разделение FDM 3D-принтеров по направлениям движения рабочего стола и экструдера [99-104]. Конструкции 3D-принтеров и механика отличаются разнообразием: среди FDM принтеров выделяются дельта-принтеры [105], SCARA-принтеры [106], принтеры, в которых экструдер и рабочий стол перемещаются в декартовой системе координат XYZ [107], Festo 3D Coooner [102], принтеры с множеством зависимых [108] и независимых [109] печатающих головок, антропоморфные манипуляторы-принтеры [110].

Конструкция кинематической структуры 3D принтера влияет на скорость печати детали в зависимости от её формы: в случае, если в сечениях преобладают окружности – большую производительность и точность обеспечит, например, структура с вращающимся в плоскости (OXY) столом; в случае, если в сечениях

преобладают, например, прямоугольники, то эффективнее будет 3D-принтер, где экструдер и рабочий стол перемещаются в декартовой системе координат XYZ.

Рассмотрим на примере функционирования 3D-принтера обобщенную модель функционирования технической системы. На основе закона функционирования технических систем [111] в любой технической системе выполняется трансдействие (T_d) (транспортирование (T_n), трансформирование (T_f), трансхронирование (T_x) (хранение)) над потоками материальных объектов, энергии и информации. Результатом трансдействия является изделие, параметры и свойства которого определяются совокупностью взаимодействий энергии (\mathcal{E}), информации (\mathcal{I}) и материала (\mathcal{M}) (Рисунок 1).

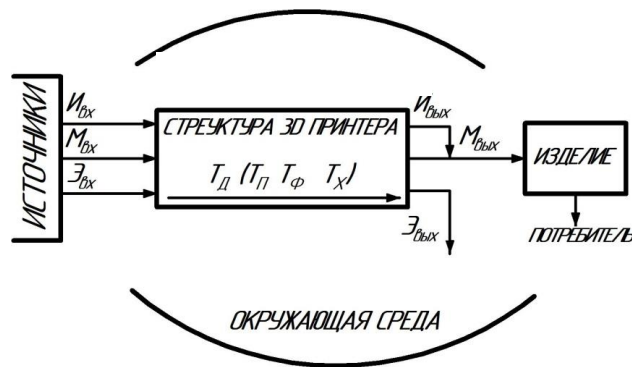


Рисунок 1 – Обобщенное взаимодействие потоков

Функционирование 3D-принтера показано (Рисунке 1) так, что отображается взаимодействие потоков энергии, информации, их воздействие на материал: транспортирование и трансформирование.

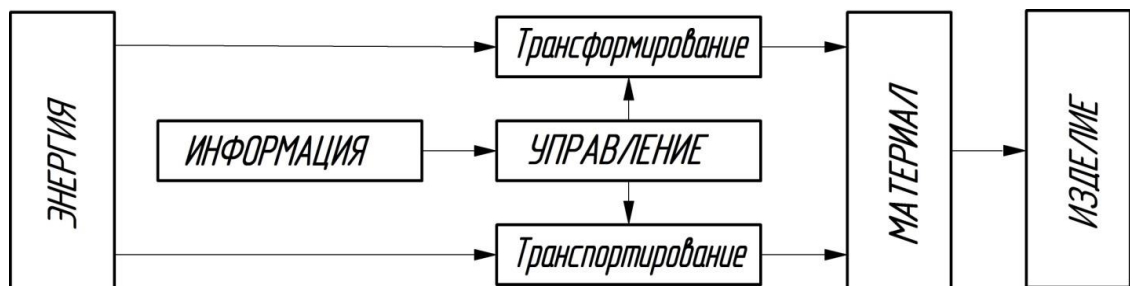


Рисунок 2 – Взаимодействие потоков в 3D-принтере

Энергетический поток в системе 3D-принтер можно разделить на две части: первая – осуществляет трансформирующее воздействие на материал (например, тепловая энергия при FBM технологии, энергия света при стереолитографии), вторая – поступает к приводам, которые в процессе печати перемещают материал в

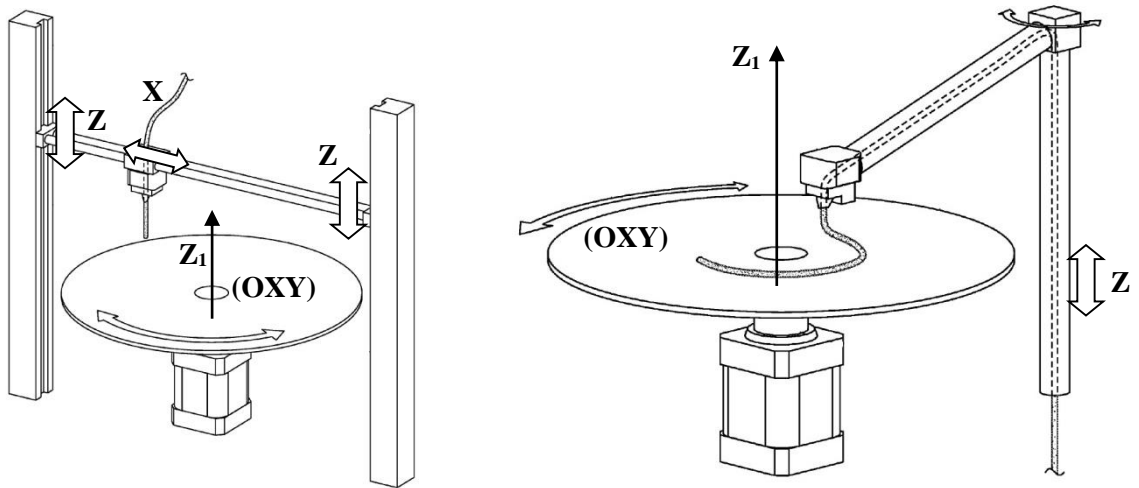


Рисунок 4 – Конструкции 3D-принтера (заявка US № 20150298393 от 22.10.2015)

В случаях с антропоморфными манипуляторами-принтерами и дельта-принтерами и т.д. количество (i, o, p, a, s, d) плоскостей и количество (j, k, l, v, b, m) осей может быть большее количество в зависимости от необходимости описать все формообразующие движения звеньев рабочих органов 3D-принтера. Также существуют принтеры и с несколькими $(1..n)$ печатающими головками.

На основании морфологического анализа 3D-принтеров, реализующих синтез изделий FDM методом, как систем, где имеет место основной закон функционирования техники [111-113], сформирована обобщенная модель функционирования технической системы, позволяющая выделять в нем узлы для моделирования их динамики, принимая во внимание вид энергии, используемой для трансформирования материала и формообразующие движения, реализуемые кинематической структурой узла, что позволяет отразить сложность динамики целенаправленного движения объектов.

3. Способы изготовления вентиляционных панелей электронных аппаратов

Известен способ изготовления [114] составной вентиляционной панели, экранирующей ЭМИ, при котором из листа штампованной стали посредством волочения, штамповки, фальцовки или иным методом холодной обработки изготавливают раму вентиляционной экранирующей панели. Сотовую структуру получают из гофрированных полос из электропроводящего материала – алюминиевой фольги.

Известен воздушный фильтр [115] вентиляционной панели, экранирующей ЭМИ, для использования в персональных компьютерах, сетевом оборудовании. Вентиляционную панель изготавливают вспениванием термопластичного полимерного материала (полиуретана, полиэтилена, полипропилена и др.) с получением пор, открытых для прохождения воздуха через панель. Панель подвергается вакуумной металлизации так, чтобы слой металла закрыл внешние поверхности и поверхности пор для получения электропроводящих поверхностей.

Известна система [116] обработки данных, в которой используется экранирующее ЭМИ электронное устройство с панелью из электропроводящего полимерного материала, имеющей отверстия (круглые, многогранные, и их комбинацию). Панель изготавливается способом литья с образованием отверстий, литья с последующим вырезанием отверстий или экструдированием с образованием отверстий.

Известен способ [117] изготовления изделий на 3D-принтере из полимерного материала в виде филамента. Филамент в твердом состоянии подается с катушки валковым устройством в канал экструдера печатающей головки 3D-принтера, где материал филамента нагревается до температуры плавления, расплавленный материал экструдировается через сопло и последовательно наносится по слоям до получения изделия. Недостаток данного способа в том, что изготовленное изделие не имеет электрической проводимости и не обеспечивает экранирование электромагнитного излучения.

Известна вентиляционная панель, экранирующая ЭМИ, и способ ее изготовления [118]. Вентиляционная панель изготавливается из полимерного термопластичного материала (полипропилена, полиэтилена, акрилонитрилбутадиенстирола (ABS), поливинилхлорида (PVC)) способом литья панели с множеством сквозных отверстий под давлением или инъекционного литья в форму с последующим покрытием ее внешних поверхностей и поверхностей отверстий слоем электропроводящего материала, который может быть выбран из группы металлов (медь, цинк, олово, никель и др.). На первый слой электропроводящего материала может быть нанесен второй слой.

4. Описание структуры 3D-принтера для печати вентиляционных панелей

Для решения задачи FDM 3D-печати экранирующих ЭМИ вентиляционных панелей выбран принтер, осуществляющий послойный синтез в декартовой системе координат. Конструкция представляет собой модификацию структуры RepRap Prusa i3 Mendel. Подача пластика в сопло печатающей головки осуществляется прямым образом – приводом, расположенным непосредственно в печатающей головке.

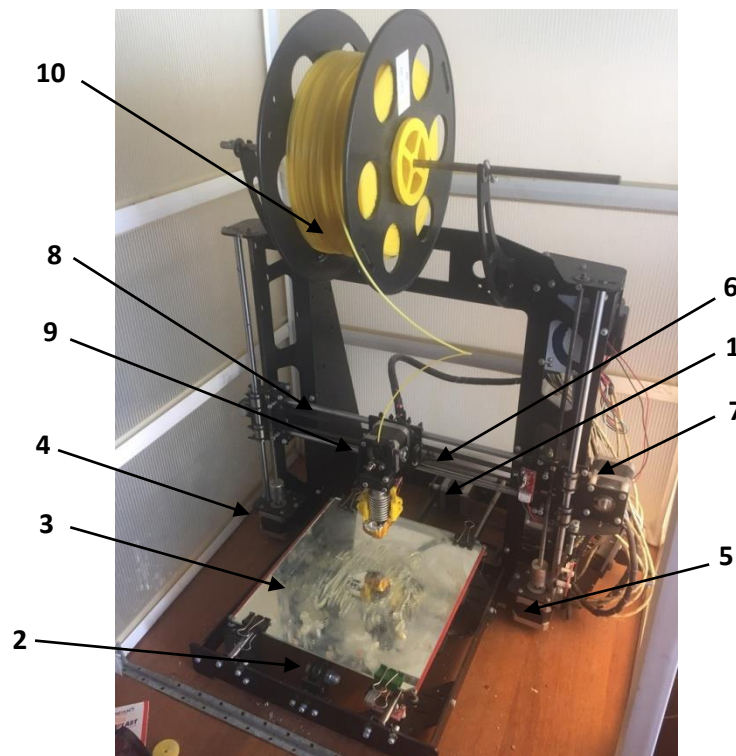


Рисунок 5 – Общий вид 3D-принтера

В качестве приводов используются шаговые двигатели NEMA 17 (Рисунок 5): 1 – перемещает по направляющим посредством ременной передачи 2 рабочий стол 3 вдоль оси Y; 4,5 – перемещают подвижную поперечину 6 вдоль оси Z; 7 – закреплен на подвижной поперечине и посредством ремня 8 перемещает вдоль оси X по направляющим печатающую головку с устройством подачи 9, в состав которого входит привод с подающей филамент 10 шестерней на валу, обеспечивающий контакт филамента с подающей шестерней.

В составе 3D-принтера присутствуют следующие аппаратные средства: Arduino MEGA 2560 [119] с RAMPS 1.4 (в качестве надстройки); драйверы шагового двигателя DRV8825 [120]; нагревательный стол MK2B [121]; датчики

(концевые выключатели и терморезисторы NTC 3950FB); импульсный блок питания 12В или 24В.

5. Материалы для 3D-печати вентиляционных панелей

В качестве материала для вентиляционных панелей электронных аппаратов выбран ABS пластик [122] в виду его доступности (1300..1500 руб./кг), прочностных характеристик (Таблица 3-5), а также высокой (~100°C), по сравнению с PLA пластиком (~ 60°C), термостойкостью.

Если при знакопеременных нагрузках не исключается расслоение детали (слабая межслойная адгезия), то в качестве материала возможно использовать NYLON Carbon 2 [123] – соединение на основе полимера нейлона 12 с наполнением углеродным волокном не менее 10%. ABS Conductive [124] состоит из смеси полимерной смолы и углеродного волокна и электропроводящих компонентов, позволяющие увеличить электропроводность пластика, что может использоваться для электромагнитного экрана.

6. Методология процесса изготовления вентиляционных панелей

Необходимо определить шаги и последовательность их реализации для организации эффективного (с позиции надежности, точности, производительности и себестоимости) процесса послойного синтеза методом FDM 3D-печати с помощью принтера, описанного в разделе 3 Приложения.

6.1. Организация процесса 3D-печати

FDM 3D-печать представляет собой процесс подачи пластиковой нити в блок экструдера печатающей головки (Рисунок 6), перемещающейся вдоль оси Y на подвижной поперечине со скоростью V_y . Вращение ω_e подающей шестерни 1 определяет скорость подачи V_e филамента 2 в область K, где происходит его трансформирование (при температуре $t_{плав}$ нагревателя 5) из твердого состояния в жидкое. Длина участка размягченного пластика должна быть минимальной для обеспечения точности передачи давления, возникающего за счет проталкивания

подающей шестерней материала в область K . Иначе при проталкивании расплавленного материала из сопла 3 давление будет недостаточным. Поэтому участок L изготавливают из алюминиевой трубки с ребрами (радиатор) 4 и монтируют вентилятор. Нагреватель 5 должен отстоять от радиатора на расстоянии $J - 8..12$ мм. Таким образом, длина участка размягченного теплом нагревателя 5 филамента 2 будет минимальной. Диаметр сопла 3 печатающей головки и скорость подачи определяют расход материала Q_p из сопла (формирующая деталь 6).

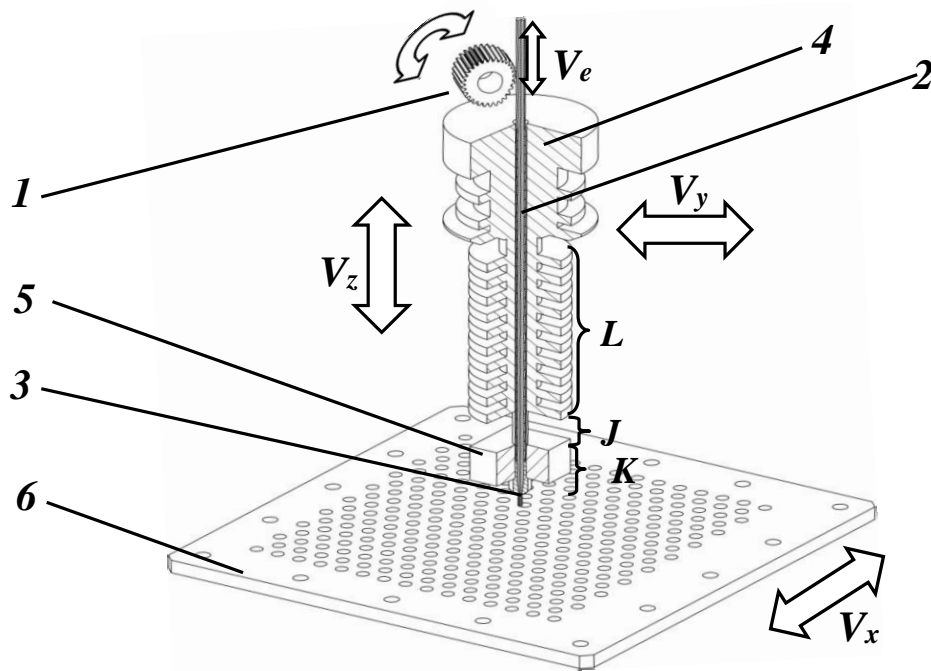


Рисунок 6 – Процесс печати

Материал, вышедший из сопла 3 печатающей головки, и формирующий первый слой детали 6 должен не отставать от поверхности рабочего стола (в результате термической усадки пластика). Для этого необходимо обеспечить требуемую для материала температуру поверхности рабочего стола и, при необходимости, покрыть веществом, повышающим адгезию экструдированного материала и поверхности рабочего стола.

1) Для изготовления вентиляционной панели экранирующей ЭМИ электронного аппарата методом FDM 3D-печати использованы следующие материалы: ABS (акрилонитрилбутадиенстирол), ABS Conductive и NYLON Carbon 2 (соединение на основе с полимера нейлон 12 и наполнением углеволокном не менее 10%). Диаметр филамента составляет 1,75 мм.

Таблица 3 – Настройка печати для филамента ABS

Слой			Скорость					Температура		Заполнение		
Высота слоя печати	Высота первого слоя	Скорость печати первого слоя	Скорость печати по умолчанию	Скорость печати внешнего	Скорость печати сплошного заполнения верха и низа модели	Скорость печати поддержек	Скорость холостого перемещения по осям X и Y	Рабочий стол	Сопло печатающей головки	Плотность заполнения	Тип заполнения	Угол заполнения
0,15...0,2 мм	50%	50%	3800 мм/мин	50%	80%	90%	4800 мм/мин	90..110 °С	220..250 °С	30...75%	Сетка	45°;- 45°;0°;90°

Таблица 4 – Настройки печати для филамента ABS Conductive

Слой			Скорость					Температура		Заполнение		
Высота слоя печати	Высота первого слоя	Скорость печати первого слоя	Скорость печати по умолчанию	Скорость печати внешнего периметра	Скорость печати сплошного заполнения верха и низа модели	Скорость печати поддержек	Скорость холостого перемещения по осям X и Y	Рабочий стол	Сопло печатающей головки	Плотность заполнения	Тип заполнения	Угол заполнения
0,2 мм	50%	45%	2400 мм/мин	45%	70%	80%	3600 мм/мин	100..110 °С	230..260 °С	80..100%	Сетка	45°;- 45°;0°;90°

Таблица 5 – Настройки печати для филамента NYLON Carbon 2

Слой			Скорость					Температура		Заполнение		
Высота слоя печати	Высота первого слоя	Скорость печати первого слоя	Скорость печати по умолчанию	Скорость печати внешнего периметра	Скорость печати сплошного заполнения верха и низа модели	Скорость печати поддержек	Скорость холостого перемещения по осям X и Y	Рабочий стол	Сопло печатающей головки	Плотность	Тип заполнения	Угол заполнения
0,2 мм	50%	35%	1900 мм/мин	45%	65%	60%	2200 мм/мин	60..90 °С	240..270 °С	65%	Сетка	45°;-45°;0°;90°

II) Для управления 3D-принтером используется программа Repetier-Host V1.5.6 [125]. В качестве программы-слайсера использован находящийся в открытом доступе Slic3r (Prusa edition) v1.41 [126], позволяющий настроить процесс печати: высоту первого и последующих слоёв детали; скорости – печати первого слоя, ускорение «разгон-торможение», печати внешнего периметра, печати сплошного заполнения верхней и нижней частей модели, печати поддержек, холостого перемещения по осям X и Y; степень и способ заполнения внутренней части детали;

III) На основании свойств филамента ABS, ABS Conductive и NYLON Carbon 2 в таблицах 3-5 выбраны основные параметры режимов работы 3D-принтера.

IV) Расположение детали на рабочем столе определяет необходимость и количество поддерживающих вспомогательных структур (поддержек). При выборе способа расположения критичным становится фактор затрат времени на реализацию печати детали в различной позиции.

Анализировались два способа размещения экранирующей ЭМИ вентиляционной панели на рабочем столе (Рисунок 7).

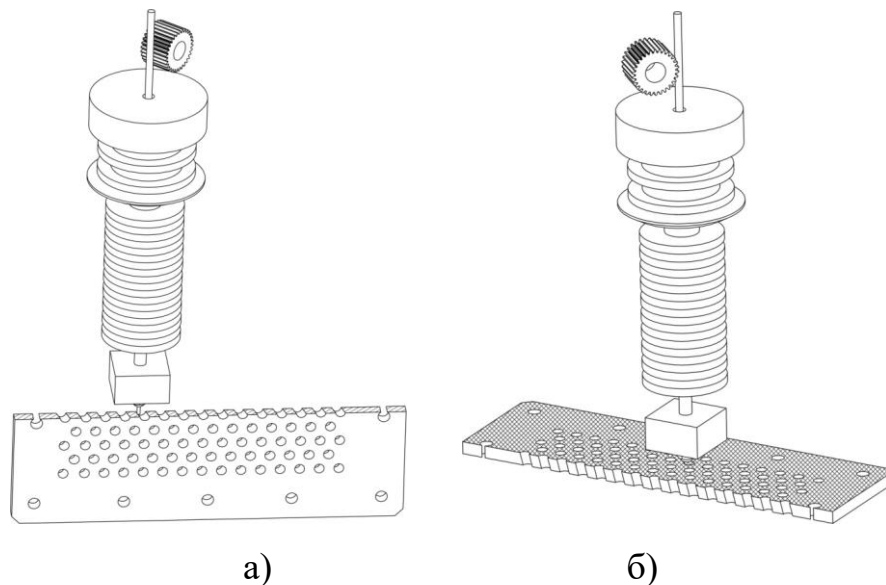


Рисунок 7 – Способ расположения детали

В случае а) сечение состоит из прямоугольников, послойных синтез которых представляет в последовательной реализации разгона-торможения,

сопровожаемого подачей расплавленного материала в процессе перемещения на заданные расстояния по прямоугольной траектории.

В случае б) присутствуют отверстия, 3D-печать которых в декартовой системе координат осуществима с использованием процедур, состоящих из последовательных смещений печатающей головки вдоль осей X и Y; создается приближенный образ окружности, точность которой определяется шагом при смещении. Операция повторяется для каждого отверстия, количество которых в вентиляционной панели достаточно велико.

При помощи функционала программы Repetier-Host V1.5.6 расчета времени получены значения временных затрат для печати вентиляционной панели со множеством отверстий для схем а и б (в часах и минутах).

6.2. Технологический процесс 3D-печати вентиляционной панели

Послойный синтез детали методом представляет собой упорядоченную последовательность действий управляющих, исполнительных и сенсорных элементов.

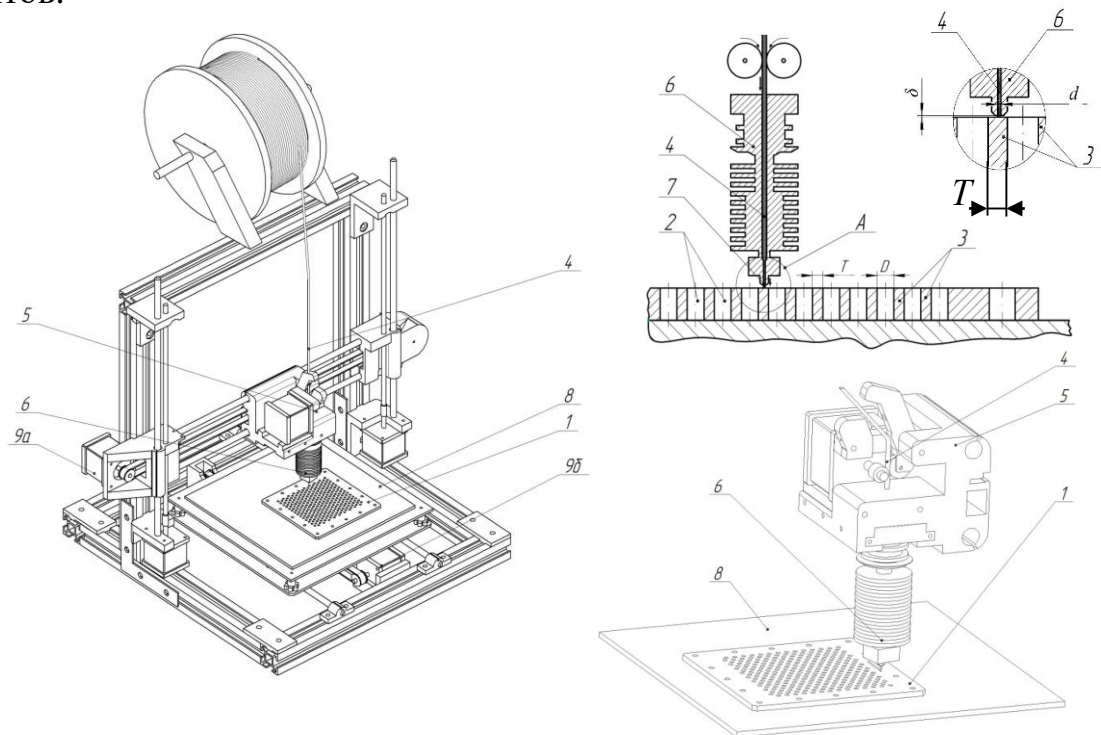


Рисунок 8 – 3D-принтер и печатающая головка

Способ создания детали заключается послойном нанесении экструдированного через сопло 7 экструдера 6 расплавленного материала на поверхность рабочего стола 8 3D-принтера (Рисунок 8) и описан в патенте [95].

7. Оценка влияния режимов работы и свойств материала на производительность 3D-печати

Использовано программное обеспечение Prusa3D Slic3r MK2, позволившее оценить массу филамента, необходимого для послойного синтеза детали, и время для печати детали.

Для печати вентиляционной панели электронного аппарата рассмотрен филамент ABS, ABS Conductive и Nylon Carbon 2. Свойства материалов приведены в Таблицах 6-8. Каждому материалу подобраны режимы послойного синтеза: параметры слоя (высота слоя печати, высота первого слоя); скорости печати (по умолчанию, первого слоя, внешнего периметра, сплошного заполнения верха и низа модели, поддержек, холостого перемещения по осям X и Y); настройки температуры (рабочего стола и нагревателя в сопле печатающей головки); параметры заполнения (плотность и тип заполнения; угол заполнения; количество слоев контура детали, ее верхней и нижней частей). Высота слоя – 0,2 мм для всех режимов.

Использованы два способа расположения детали – горизонтально и вертикально. Вид формообразующей траектории перемещения сопла печатающей головки при печати слоя вентиляционной панели для горизонтального и вертикального расположения на поверхности рабочего стола показан на Рисунке 9.

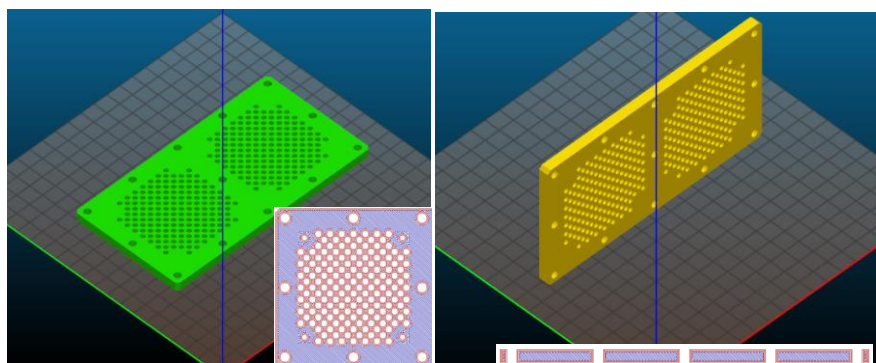


Рисунок 9 – Варианты расположения детали: а) горизонтально, б) вертикально

Для горизонтального расположения возможны два режима: в первом случае в ходе формирования слоя траектория строится без перемещения по оси Z, во втором такая функция (Z-hop) включена.

В целях повышения адгезии между деталью и поверхностью рабочего стола использован раствор ABS пластика в ацетоне и клей БФ-19 для Nylon Carbon 2. Температура рабочего стола для всех материалов – 105 °С, но после печати 5-10го слоя Nylon Carbon 2 температура снижается до 70 °С. Температура нагревателя сопла печатающей головки для ABS – 225 °С, ABS Conductive – 240 °С, Nylon Carbon 2 – 250°С. Заполнение детали варьируется от 30% до 100% с шагом 5%. Плотность ABS – 1,04 г/см³, ABS Conductive – 1,15 г/см³, Nylon Carbon 2 – 1,4 г/см³.

Скорость печати для всех видов филамента варьируется в диапазоне от 1800 до 3900 мм/мин. Цена 1кВт/ч составляет – 3,41 руб., 1 г филамента ABS – 1,3 руб., ABS Conductive – 4,3руб., Nylon Carbon 2 – 5 руб.. Энергопотребление 3D-принтера при работе с филаментом ABS – 0,24кВт/ч, ABS Conductive – 0,26кВт/ч, Nylon Carbon 2 – 0,28 кВт/ч.

Настройки печати загружены в Slic3r (Prusa edition) v1.41, полученные режимы работы 3D-принтера обеспечивают послойный синтез деталей с учетом свойств используемых материалов: ABS, ABS Conductive, Nylon Carbon. Слайсер содержит информацию о плотности, стоимости используемого материала и энергопотреблении. Рассматривается процесс послойного синтеза вентиляционной панели со множеством отверстий (Рисунок 9) при ее вертикальном и горизонтальном расположении.

Программой Slic3r (Prusa edition) v1.41 производится оценка временных затрат на создание одной панели при: 1) изменении скорости перемещения рабочих органов (с 1800 до 3900 мм/мин с шагом 300 мм/мин); 2) изменении степени заполнения (%) внутреннего объёма панели (с 30% до 100% с шагом 10%); 3) расположения детали на рабочем столе в вертикальном (*B*) и горизонтальном положении, для горизонтального расположения рассматриваются варианты с выключенной (*I*) и включенной (*I*Z) функцией Z-hop; 4) материала печати (ABS, ABS Conductive, Nylon Carbon 2).

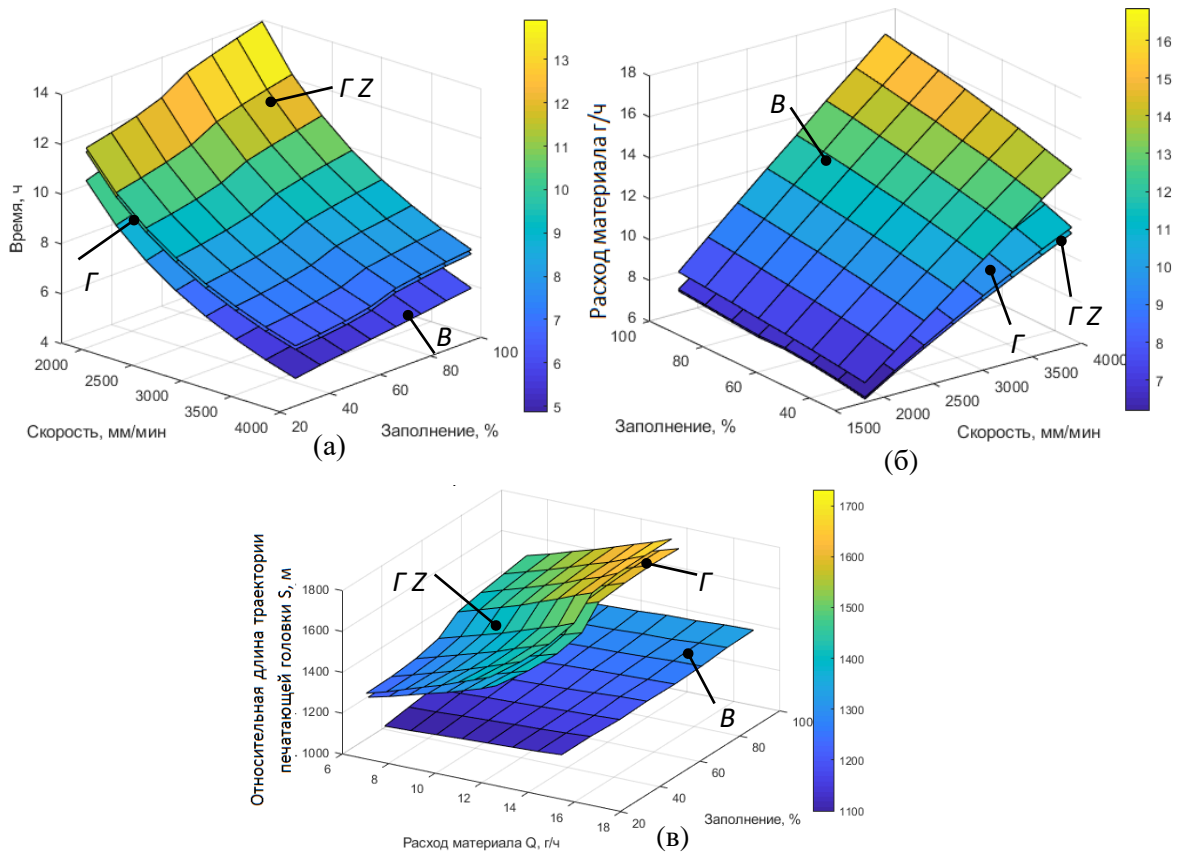


Рисунок 10 – Затраты времени (а) и материала (б), относительная длина траектории печатающей головки (в) при печати панели из пластика ABS

Объем полученных данных усложняет анализ производительности; поэтому, для упрощения восприятия и сравнения, результаты представлены в виде поверхностей (Рисунки 10-13), характеризующих:

а) время печати одной вентиляционной панели в зависимости от заданных скорости перемещения печатающей головки и степени заполнения модели материалом;

б) расход материала Q г/ч, при изменении скорости перемещения печатающей головки и степени заполнения модели материалом;

в) относительную производительность (длины S формообразующей траектории печатающей головки), при расходе материала Q и степени заполнения модели материалом.

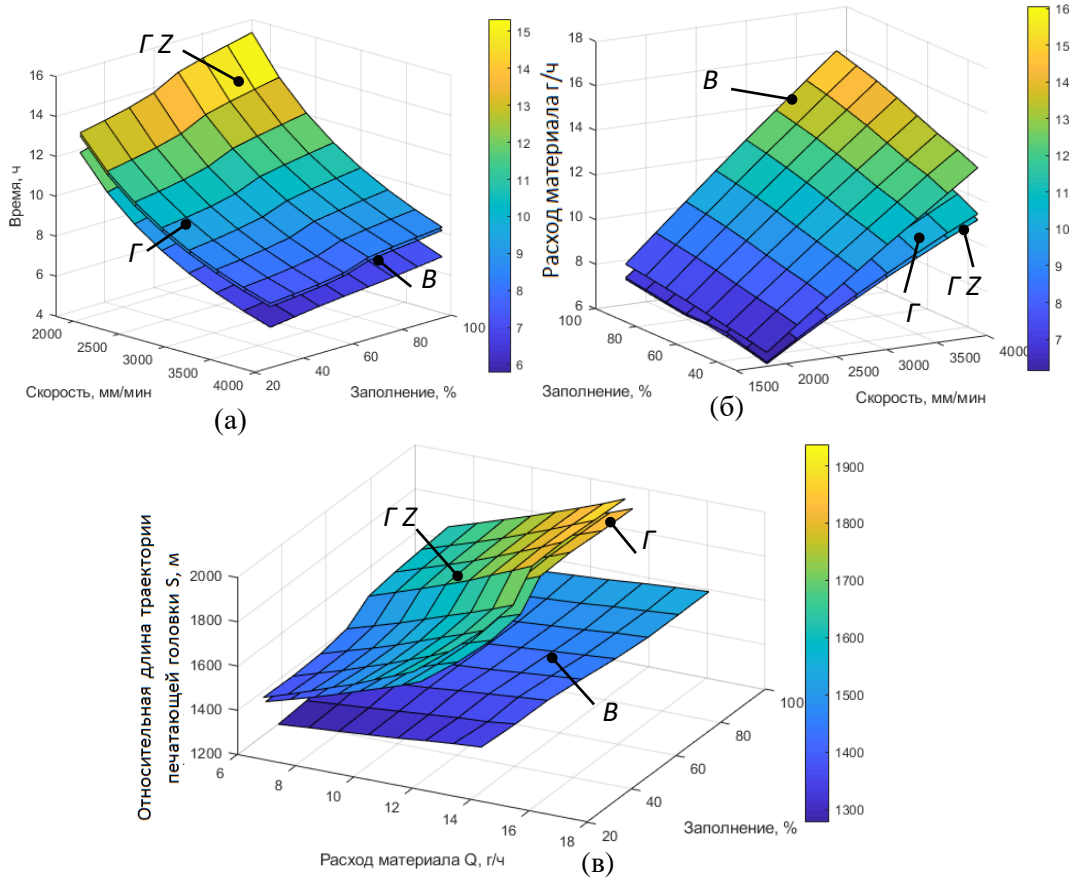


Рисунок 11 – Затраты времени (а) и материала (б), относительная длина траектории печатающей головки (в) при печати панели из пластика ABS Conductive

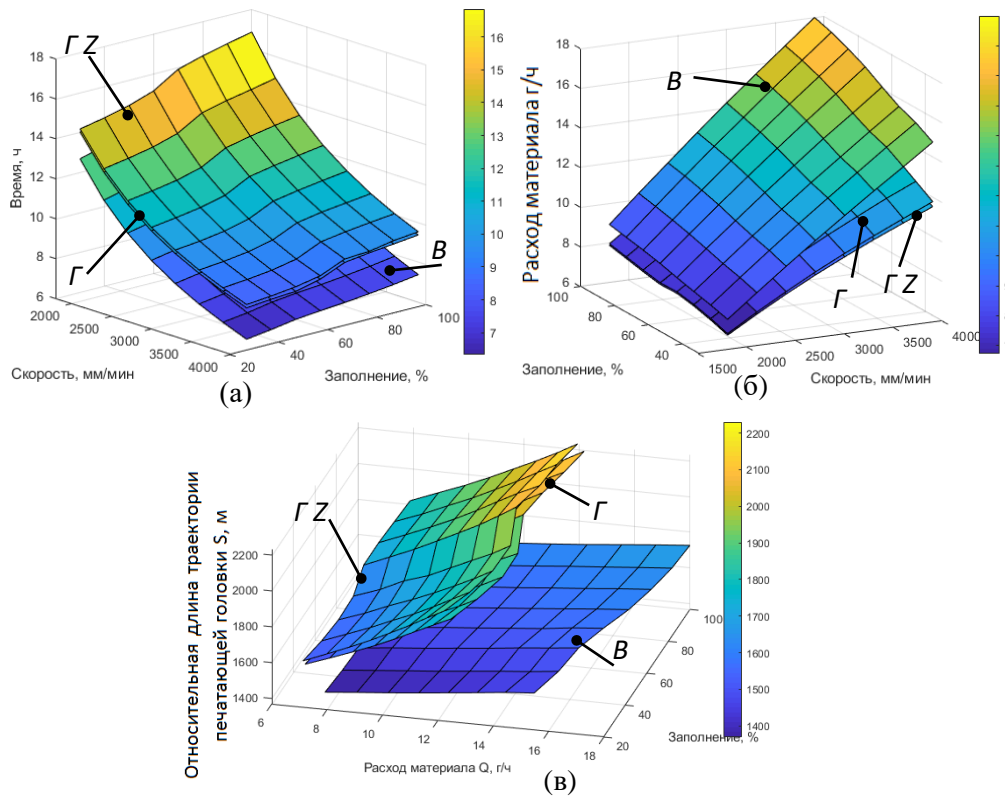


Рисунок 12 – Затраты времени (а) и материала (б), относительная длина траектории печатающей головки (в) при печати панели из пластика Nylon Carbon 2

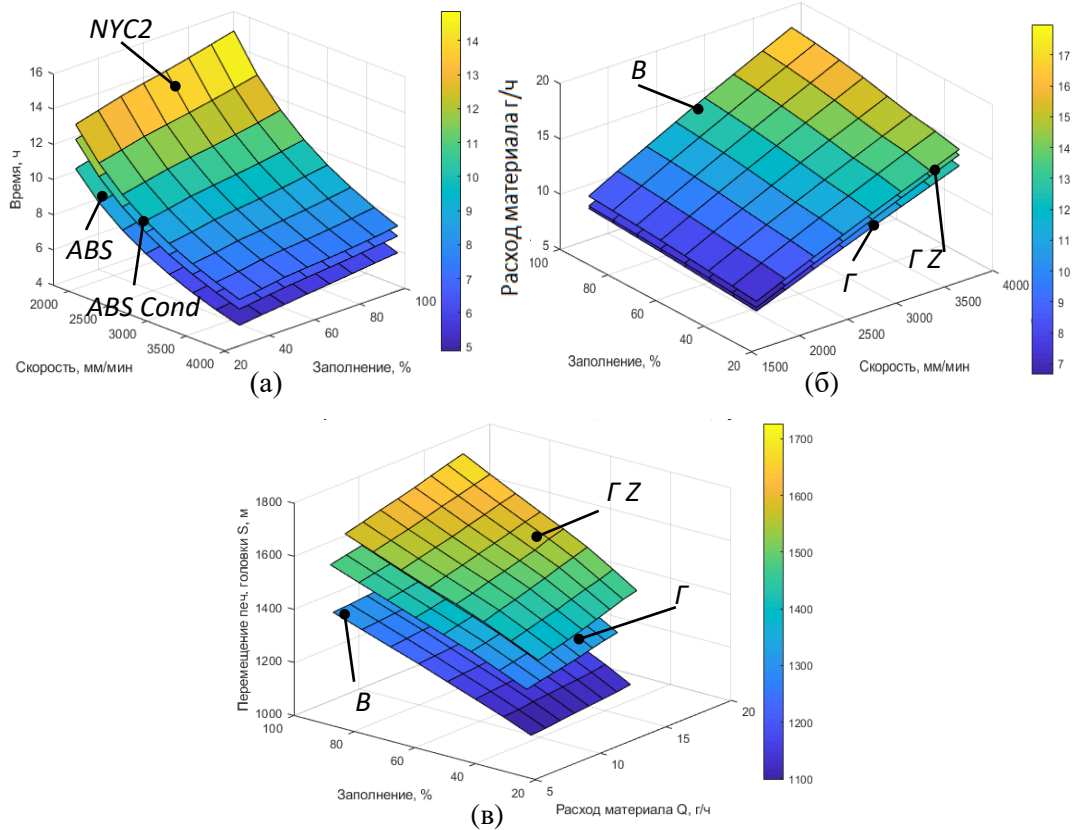


Рисунок 13 – Затраты времени (а) и материала (б), относительная длина траектории печатающей головки (в) при печати панели из пластика ABS, ABS Conductive, Nylon Carbon 2 при вертикальном размещении

Результаты моделирования согласуются с натурными испытаниями, что позволяет оценить производительность при задании сравнении режимов печати. Это демонстрирует целесообразность использования в 3D-принтерах ускорения типа «разгон-торможение» для целенаправленного перемещения формообразующих подвижных узлов с элементами конечной жесткости.