ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Сидоров Станислав Михайлович

ПОЛУМАРКОВСКИЕ И СКРЫТЫЕ МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ С РЕЗЕРВОМ ВРЕМЕНИ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
д-р техн. наук, профессор
Обжерин Юрий Евгеньевич

Севастополь – 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. При проектировании и эксплуатации систем большое внимание уделяется надежности и эффективности как самой системы в целом, так и отдельных ее компонентов. Вопросам надежности систем различного назначения посвящены работы [1, 2, 7, 13, 20, 21, 25, 26, 54, 61, 70, 71, 89]. Существуют различные способы повышения надежности и эффективности функционирования систем, одним их которых является временное резервирование [21, 61, 15, 29, 30, 131]. Оно получило довольно широкое применение, как требующее сравнительно меньших затрат и позволяющее значительно повысить надёжность и гибкость системы.

Временное резервирование — это метод повышения надёжности и эффективности систем, при котором системе в процессе функционирования предоставляется возможность израсходовать некоторое дополнительное время (резерв времени) на восстановление характеристик. Для систем с временным резервированием нарушение работоспособности системы не обязательно сопровождается отказом системы, так как имеется возможность восстановить работоспособность системы за резервное время.

Резерв времени может создаваться за счёт увеличения времени, выделяемого системе для выполнения задания и называемого оперативным временем. Он может возникать при создании запаса производительности всей системы или отдельных её элементов. Наличие резерва времени характерно для систем, обладающих функциональной инерционностью. Источниками резерва времени являются промежуточные накопители, используемые в автоматизированном производстве [14, 29, 7, 79, 81, 92, 129, 118] и в информационных системах [60, 96, 114, 115, 122].

Временное резервирование применяется в газотранспортных системах [25, 26, 52], в которых источником резерва времени являются подземные хранилища газа, в энергетических системах резерв времени реализуется за счёт накопителей энергии большой ёмкости [25, 26, 52, 67, 83, 107, 141]. Следует отметить, что в

связи с появлением в последнее время и использованием накопителей энергии все большой емкости [107, 141], возрастает интерес к моделированию систем с резервом времени.

Наличие резерва времени связано с человеческой надежностью: он даёт возможность устранить последствия ошибок оператора.

Существенный вклад в исследования систем с резервом времени внесли Креденцер Б.П. [21], Черкесов Г.Н. [59-61], Копп В.Я. [14, 15], Обжерин Ю.Е. [14, 15, 30, 29, 41, 125, 117, 118], Песчанский А.И. [14, 15, 49, 50, 117, 126]. Вопросам исследования систем с резервом времени посвящены работы авторов, Бобовича Л.М. [3], Гениса Я.Г [4], Гильмана А.С. [5], Дружинина Г.В. [7], Зедгенидзе Г.Г. [8], Зеленцова В.А. [9], Харченко В.С. [59], Новикова Е.В. [27, 28], Ушакова И.А. [131], Калимулиной Э.Ю. [92] и др. Исследования зарубежных авторов представлены в работах Barnes A.K. et. al. [67], Birolini A. [71], Dong W. et. al. [81], Jia X. et. al [92], Kakubava R.V., Khurodze R.A. [94], Kumar G. et. al. [103], Kumar V.P., Wang S.J. [104], Mendes A.A. et. al. [109], Wu X., Hillston J. [139], Wu X., Yu H. [140, 145], Yan H. et. al. [142], Yao D.D., Buzacott J.A. [143, 144] и др.

Монография Коппа В.Я, Обжерина Ю.Е., Песчанского А.И. [15] посвящена построению полумарковских моделей с общим фазовым пространством состояний систем с временным резервированием. Однако, как указано в [131], этот метод резервирования исследован менее подробно, по сравнению с другими видами резервирования и требуются дополнительные исследования в этой области.

В ряде работ для построения моделей систем и исследования их надёжности и эффективности используется теория полумарковских процессов [10-12, 16, 18, 58, 90, 101, 102, 106, 113], скрытые марковские [24, 75, 77, 85-87, 90, 97, 100, 105, 127, 128, 135-138] и скрытые полумарковские модели [6, 65, 66, 72-74, 84, 98, 99, 108, 111, 132, 146-148]. В большинстве работ применяются полумарковские процессы с конечным или счётным множеством состояний [19, 64, 89, 91, 106]. Следует отметить, что полумарковские процессы и скрытые полумарковские

модели с общим фазовым пространством состояний ещё недостаточно широко вошли в практику моделирования систем.

Современные большие системы характеризуются большим числом элементов, разнообразием связей, сложной структурой. При использовании таких систем, для которых построена полумарковская модель, не всегда удаётся при изменениях её состояний полностью получить информацию, содержащуюся в кодировке состояний, а есть только возможность получить некоторый сигнал (информацию), связанный с состояниями вложенной цепи Маркова (полумарковского процесса). Например, в фазовом состоянии полумарковского процесса для каждого элемента системы указано находится ли он в рабочем состоянии или на восстановлении, а при использовании системы можно получить сигнал только о числе работоспособных элементов. Для систем массового обслуживания, например, могут быть получены данные только о числе свободных приборов, а не о состоянии каждого прибора, содержащиеся в фазовых состояниях. При использовании систем, бывает сложно или невозможно получить значения дополнительных непрерывных компонент, которые, как было отмечено, несут полезную информацию о функционировании системы. В этих случаях состояния вложенной цепи Маркова (ВЦМ) можно считать скрытыми (ненаблюдаемыми). Поэтому возникает задача нахождения оценок характеристик вложенной цепи Маркова и полумарковского процесса на основе наблюдаемого вектора сигналов. Это можно сделать, используя скрытые марковские и скрытые полумарковские модели.

Скрытые марковские и полумарковские модели применяются во многих отраслях науки и техники: распознавании сигналов [127, 93, 17, 53, 84, 97, 135], биоинформатике и медицине [78, 84, 136, 66], моделировании временных рядов [149], экономике [73, 97], энергетике [83, 112, 44], промышленности [74, 76, 85, 108] и др. Однако, большинство публикаций по данной тематике на иностранном языке, в то время как русскоязычные публикации практически отсутствуют.

Целью данной работы является разработка и развитие методов математического моделирования восстанавливаемых технологических систем с

резервом времени и их моделей на основе полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний и скрытых марковских моделей.

Для достижения поставленной цели необходимо решить **следующие задачи**:

1. Анализ современной литературы по временному резервированию и скрытым марковским моделям.
2. Разработка полумарковских моделей производительности технологической ячейки с учетом наличия мгновенно пополняемого резерва времени.
3. Разработка полумарковских моделей функционирования двух- и многокомпонентных систем с поэлементным резервом времени.
4. Развитие приближённых аналитических методов анализа систем с резервом времени на основе использования алгоритмов асимптотического и стационарного фазового укрупнения.
5. Анализ влияния величины резерва времени на характеристики надежности и эффективности систем.
6. Разработка методики построения скрытой марковской модели для систем с резервом времени.
7. Разработка скрытых марковских моделей систем с резервом времени.

Объект исследования – процессы функционирования восстанавливаемых технологических систем с резервом времени.

Предмет исследования – полумарковские и скрытые марковские модели восстанавливаемых технологических систем с резервом времени.

Соответствие шифру специальности. Работа соответствует паспорту специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» и охватывает следующие области исследования, входящие в специальность:

- пункт 1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений;

- пункт 2. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей;
- пункт 5. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Научная новизна:

1. Впервые разработаны полумарковские модели двух- и многокомпонентных систем с поэлементным резервом времени и получены расчетные формулы их характеристик надежности и эффективности.
2. Впервые разработаны полумарковские модели производительности технологической ячейки с учетом наличия мгновенно пополняемого резерва времени и получены расчетные формулы производительности.
3. Предложена методика построения скрытой марковской модели на основе укрупненной полумарковской модели с резервом времени.
4. На основе предложенной методики, впервые разработаны скрытые марковские модели систем с резервом времени, допускающих построение полумарковской модели.
5. Разработаны компьютерные программы расчета характеристик надежности систем с резервом времени, решения задач, связанных со скрытыми марковскими моделями.

Научная и практическая значимость заключается в следующем:

1. Разработанные полумарковские и скрытые марковские модели позволяют анализировать влияние величины резерва времени на характеристики надежности и эффективности систем различного назначения.
2. Полученные формулы позволяют рассчитывать стационарные характеристики надежности и эффективности систем различного назначения с учетом резерва времени, решать оптимизационные задачи распределения резерва времени между элементами системы.

3. Разработанные скрытые марковские модели систем позволяют прогнозировать состояния системы на основе полученного вектора сигналов, находить наиболее вероятные последовательности состояний по сигналам.

4. Полученные результаты можно использовать для систем различного назначения.

5. Разработанные полумарковские и скрытые марковские модели могут быть использованы для создания на их основе алгоритмов и информационных систем поддержки принятия решений при проектировании и эксплуатации систем различного назначения, а также прогнозирования их состояний.

6. Результаты анализа надежности и эффективности нефтепровода с поэлементными резервуарными парками при должной технологической переформулировке можно использовать для анализа надежности и эффективности системы газопровода с подземными хранилищами газа, системы водоснабжения с резервуарами на каждом участке, информационной системы с поэлементными хранилищами данных, систем электроэнергетики с поэлементными накопителями энергии.

Методология и методы исследования. Результаты работы базируются на применении следующих аппаратов исследований: теории марковских и полумарковских процессов, скрытых марковских и скрытых полумарковских моделях, теории вероятностей, методов математического моделирования, теории надежности, теории восстановления, теории интегральных уравнений, теории принятия решений и др.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Полумарковские модели двух- и многокомпонентных систем с поэлементным резервом времени и их характеристики надежности и эффективности.

2. Полумарковские модели и формулы производительности технологической ячейки с учетом наличия резерва времени.

3. Методика построения скрытых марковских моделей на основе укрупненной полумарковской модели системы.

4. Скрытые марковские модели на основе укрупненных полумарковских моделей систем резервом времени.

Достоверность и обоснованность результатов диссертационной работы обеспечены корректным использованием математического аппарата, строгостью выводов аналитических формул, апробацией на научно-технических конференциях.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований № 15-01-05840а и № 18-01-00392а, а также в рамках основной части государственного заказа № 1.10513.2018/11.12 Министерством образования и науки Российской Федерации.

Апробация результатов исследования. Основные результаты работы были представлены на следующих конференциях:

- Международная научно-технической конференции «Прикладные задачи математики», г. Севастополь, (2015-2018 гг.);
- Всероссийская конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологических систем», г. Москва, (2015-2016 гг.);
- Международная научно-техническая конференция «Автоматизация: проблемы, идеи, решения», г. Севастополь, (2015 г.);
- Международная научно-техническая конференция «Автоматизация и приборостроение: проблемы, решения», г. Севастополь, (2016-2017, 2020 гг.);
- Международная научно-техническая конференция «Современные направления и перспективы развития технологий обработки и оборудования в машиностроении» (ICMTMTE), г. Севастополь, (2017-2020 гг.);
- Международная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (DCCN), г. Москва, (2018-2019 гг.);
- Международный научный семинар «Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики», г. Иркутск, оз. Байкал, (2018 г.);

- Международный научный семинар «Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики», г. Ташкент, Республика Узбекистан, (2019 г.);
- Международный научный семинар «Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики», г. Казань, (2020 г.);
- XV Международная научно-техническая конференция «Динамика технических систем» (ДТС-2019), г. Ростов-на-Дону, (2019 г.);
- XV международная конференция по электромеханике и робототехнике «Завалишинские чтения — 2020», г. Уфа, (2020 г.).

Публикации результатов исследования. Основные результаты по теме диссертации изложены в 30 работах: 11 статей опубликовано в изданиях, входящих в международные базы Scopus и Web of Science [88, 112, 114-116, 118-121, 123, 124], 11 статей в других изданиях [33, 35, 38, 40-46, 123], 6 тезисов докладов [31, 32, 34, 39, 47, 48], а также получены два свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ [36, 37].

Личный вклад. Все исследования, составляющие основное содержание диссертационной работы, проведены автором лично в процессе научной деятельности либо при его непосредственном участии. В совместно опубликованных работах научному руководителю принадлежат постановки задач. Все известные результаты, полученные другими авторами, указаны в работе со ссылками на оригиналы. В работах с соавторами, лично соискателю принадлежат следующие материалы: [119] – построение математической модели производительности технологической ячейки (ТЯ), анализ влияния величины резерва времени (РВ) на производительность системы; [46] – построение полумарковской модели производительности ТЯ с мгновенно пополняемым РВ без прекращения обработки единицы продукции, решение системы интегральных уравнений; [120, 41] – построение полумарковской модели двухкомпонентной системы с резервом времени, нахождение приближенных характеристик надежности с применением АФУ; [124] – построение полумарковской модели, решение системы интегральных уравнений для определения стационарного

распределения ВЦМ, вычисление стационарных характеристик надежности и эффективности функционирования многокомпонентной системы с поэлементным РВ; [121] – построение полумарковской модели, решение системы интегральных уравнений для вычисления стационарного распределения ВЦМ, определения стационарных характеристик надежности двухкомпонентной системы с резервом времени; [114, 122] – построение укрупненной полумарковской модели и скрытой марковской модели (СММ) двухкомпонентной системы с резервом времени, решение основных задач СММ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка условных сокращений, списка условных обозначений, списка использованной литературы (149 наименований) и 10 приложений. Общий объем работы составляет 221 страниц.

Основной текст работы изложен на 138 страницах, включает 13 таблиц и 14 рисунков.

Краткое содержание работы:

В **первой главе** строятся полумарковские модели производительности технологической ячейки с мгновенно пополняемым резервом времени с прекращением и без прекращения обработки. Проводится анализ влияния величины резерва времени на производительность технологической ячейки.

Во **второй главе** разработана полумарковская модель двухкомпонентной системы с поэлементным резервом времени, найдены стационарные характеристики надежности. С использованием алгоритма стационарного фазового укрупнения найдены характеристики надежности, рассматриваемой системы. Для приближенного нахождения стационарных характеристик надежности используется приближенный метод, разработанный в [16, 15]. Проведено сравнение результатов, представлен анализ влияния резерва времени на стационарные характеристики надежности.

В **третьей главе** строится полумарковская модель многокомпонентной системы с поэлементным резервом времени, определяется стационарное распределение и стационарные характеристики надежности и эффективности в

общем виде. Получены формулы для частных случаев (параллельного и последовательного соединения элементов). Решается задача анализа надежности и эффективности нефтепровода с поэлементными резервуарными парками, результаты которой при должной технологической переформулировке можно использовать для анализа надежности и эффективности системы газопровода с подземными хранилищами газа, системы водоснабжения с резервуарами на каждом участке, информационной системы с поэлементными хранилищами данных, систем электроэнергетики с поэлементными накопителями энергии.

В **четвертой главе** на примерах двухкомпонентной системы с поэлементным резервом времени, рассмотренной в главе 2, и двухкомпонентной системы с групповым мгновенно пополняемым резервом времени предлагается методика построения скрытой марковской модели на основе укрупненной полумарковской модели. Решаются основные задачи теории СММ для рассматриваемых систем.

В **заключении** подведены основные итоги данной работы, сформулированы результаты, представляемые к защите.

В **приложениях** приведены: краткие сведения из теории полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний; решения систем интегральных уравнений для определения стационарных распределений ВЦМ полумарковских моделей для производительности ТЯ; расчеты в MathCad стационарных характеристик надежности систем, рассматриваемых в главе 2; сведения из теории скрытых марковских моделей; программа в Maple для решения задач теории СММ из главы 4; копии свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ; копия акта использования результатов диссертационной работы в учебном процессе.

Глава 1. Производительность технологической ячейки с учетом наличия резерва времени

В данной главе строятся полумарковские модели производительности технологической ячейки с учетом наличия резерва времени.

В параграфе 1.1 построена математическая модель функционирования ТЯ с прекращением обработки единицы продукции. Получена формула для производительности ТЯ.

В параграфе 1.2 построена математическая модель функционирования ТЯ без прекращения обработки единицы продукции.

В параграфе 1.3 приведен анализ влияния величины резерва времени на производительность ТЯ на примере системы, которая является частным случаем системы из параграфа 1.2. Получены формулы производительности ТЯ для случаев различного распределения резерва времени.

1.1. Производительность технологической ячейки с мгновенно пополняемым резервом времени

Рассматривается функционирование системы S, состоящей из ТЯ, обрабатывающей продукцию и имеющей мгновенно пополняемый резерв времени. В начальный момент времени ТЯ приступает к обработке продукции. Время обработки ТЯ единицы продукции – случайная величина (СВ) α_1 с функцией распределения (ФР) $F_1(t)=P(\alpha_1\leq t)$ и плотностью распределения (ПР) $f_1(t)$. Время безотказной работы ТЯ – СВ α_2 с ФР $F_2(t)=P(\alpha_2\leq t)$ и ПР $f_2(t)$. При наступлении неисправности ТЯ, начинается ее восстановление, время восстановления ТЯ – СВ β с ФР $G(t)=P(\beta\leq t)$ и ПР $g(t)$. Отказ системы S наступает в момент времени, когда время восстановления ТЯ станет равным τ ($\tau>0$, $\tau=const$) и продолжается до восстановления ТЯ. При этом предполагается, что к моменту восстановления ТЯ резерв времени пополняется до уровня τ. При наступлении неисправности ТЯ обработка единицы продукции прекращается: если время

восстановления $\beta \le \tau$, то после восстановления ТЯ обработка единицы продукции продолжается, в противном случае ($\beta > \tau$) после восстановления ТЯ начинается обработка новой единицы продукции. Предполагается, что СВ α_1, α_2, β независимы и имеют конечные математические ожидания.

Для описания функционирования системы S используем ПМВ $\{\xi_n, \theta_n; n \ge 0\}$ и соответствующий ему ПМП $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [18, 20, 16, 113]. Краткие сведения из теории полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний представлены в **Приложении А**.

Введем следующее множество E полумарковских состояний системы:

$$E=\{1, 10x, 11x, 20x, \omega, 21x\}.$$

Временная диаграмма функционирования системы изображена на Рисунке 1.1. На временной диаграмме ломаной линией показана неисправность ТЯ, жирной линией – резерв времени τ.

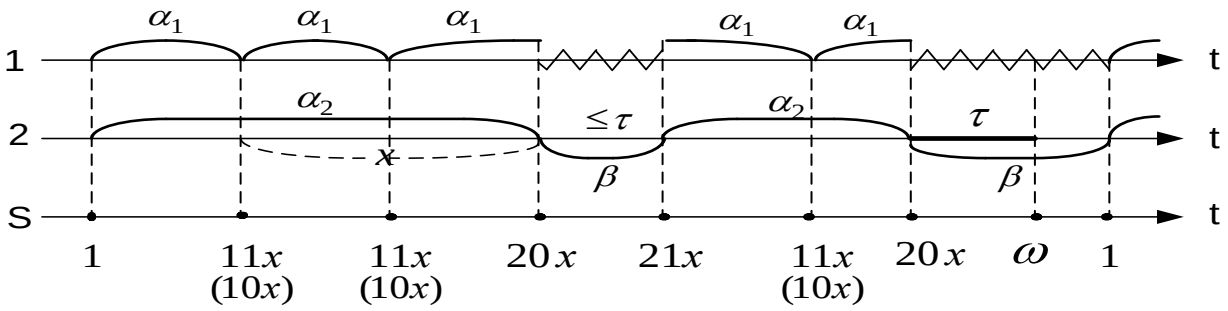


Рисунок 1.1 – Временная диаграмма функционирования системы

Найдем переходные вероятности ВЦМ $\{\xi_n; n \ge 0\}$:

$$p_1^{10x} = \int_0^\infty f_2(x+t) f_1(t)dt, x > 0; \quad p_1^{20x} = \int_0^\infty f_1(x+t) f_2(t)dt, x > 0;$$

$$p_{11x}^{10y} = f_1(x-y)dy, 0 < y < x; \quad p_{11x}^{20y} = f_1(x+y)dy, \ y > 0; \tag{1.1}$$

$$p_{20x}^{21x} = P\{\beta < \tau\} = G(\tau); \qquad p_{20x}^{\omega} = P\{\beta > \tau\} = \overline{G}(\tau);$$

$$p_{21x}^{10y} = f_2(x+y)dy, y > 0; \ p_{21x}^{20y} = f_2(x-y)dy, 0 < y < x; \ P_{10x}^{11x} = P_{\omega}^{1} = 1.$$

Обозначим через ρ(1), ρ(ω) значения стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n;\ n\geq 0\}$ на состояниях 1, ω и предположим существование стационарных плотностей ρ(10x), ρ(11x), ρ(20x) и ρ(21x) для состояний 10x, 11x, 20x и 21x соответственно.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \rho_0 = \rho(1) = \rho(\omega) = \overline{G}(\tau)\int\limits_0^\infty \rho(20y)dy, \\ \rho(10x) = \rho_0\int\limits_0^\infty f_2(x+t)\,f_1(t)dt + \int\limits_x^\infty \rho(10y)\,f_1(y-x)dy + G(\tau)\int\limits_0^\infty f_2(x+y)\rho(20y)dy, \\ \rho(11x) = \rho(10x), \\ \rho(20x) = \rho_0\int\limits_0^\infty f_1(x+t)\,f_2(t)dt + \int\limits_0^\infty f_1(x+y)\rho(10y)dy + G(\tau)\int\limits_x^\infty f_2(y-x)\rho(20y)dy, \\ \rho(21x) = G(\tau)\rho(20x), \\ \rho(1) + \rho(\omega) + \int\limits_0^\infty (\rho(10x) + \rho(11x) + \rho(20x) + \rho(21x))dx = 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

Решение системы (1.2) методом последовательных приближений представлено в **Приложении Б**. Стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n;\ n\geq 0\}$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \rho(10x) = \rho(11x) = \rho_0\varphi_1(x), \\ \rho(20x) = \rho_0\varphi_2(x), \\ \rho(21x) = \rho_0 G(\tau)\varphi_2(x), \\ \rho(1) = \rho(\omega) = \overline{G}(\tau)\rho_0\overline{\Phi}_2(0) = \rho_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

где:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) = &\int\limits_0^\infty f_2(x+t)h_{f_1}(t)dt + \int\limits_0^\infty \pi_1(x,y)dy\int\limits_0^\infty f_2(y+t)h_{f_1}(t)dt + \\ &+ \int\limits_0^\infty \gamma_2(x,t)dt\int\limits_0^\infty f_1(y+t)h_{f_2}^{(\tau)}(y)dy + \int\limits_0^\infty \pi_1(x,y)dy\int\limits_0^\infty \gamma_2(y,t)dt\int\limits_0^\infty f_1(z+t)h_{f_2}^{(\tau)}(z)dz, \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) = &\frac{1}{G(\tau)}\int\limits_0^\infty f_1(x+t)h_{f_2}^{(\tau)}(t)dt + \frac{1}{G(\tau)}\int\limits_0^\infty \pi_2(x,y)dy\int\limits_0^\infty f_1(y+t)h_{f_2}^{(\tau)}(t)dt + \\ &+ \int\limits_0^\infty \gamma_1^{(\tau)}(x,t)dt\int\limits_0^\infty f_2(y+t)h_{f_1}(y)dy + \int\limits_0^\infty \pi_2(x,y)dy\int\limits_0^\infty \gamma_1^{(\tau)}(y,t)dt\int\limits_0^\infty f_2(z+t)h_{f_1}(z)dz, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$h_{f_1}(t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_1^{*(n)}(t)$ – плотность функции восстановления $H_{f_1}(t)$ процесса восстановления, порожденного СВ α_1, $f_1^{*(n)}(t)$ – n-кратная свертка плотности распределения $f_1(t)$; $h_{f_2}^{(\tau)}(t)=\sum_{n=1}^{\infty} G^n(\tau) f_2^{*(n)}(t)$ – плотность функции восстановления $H_{f_2}^{(\tau)}(t)$;

$$\gamma_1^{(\tau)}(x,t)= f_1(x+t)+\int_0^{\infty} h_{f_2}^{(\tau)}(y) f_1(x+y+t)dy,$$

$$\gamma_2(x,t)= f_2(x+t)+\int_0^{\infty} h_{f_1}(y) f_2(x+y+t)dy,$$

$$k_1^{(1)}(x,y)=k_1(x,y)=G(\tau)\int_0^{\infty}\gamma_2(x,t)\gamma_1^{(\tau)}(t,y)dt,$$

$$k_2^{(1)}(x,y)=k_2(x,y)=G(\tau)\int_0^{\infty}\gamma_1^{(\tau)}(x,t)\gamma_2(t,y)dt,\ \ k_i^{(n)}(x,y)=\int_0^{\infty}k_i(x,t)k_i^{(n-1)}(t,y)dt,$$

$\pi_i(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}k_i^{(n)}(x,y)$, $\overline{\Phi}_i(0)=\int_0^{\infty}\varphi_i(x)dx$, $\overline{\Phi}_i(x)=\int_x^{\infty}\varphi_i(t)dt, i=1,2;$ постоянная ρ_0 находится из условия нормировки.

Запишем формулу для расчета производительности ТЯ [62]:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_A(t)}{t}=\frac{\int_A \rho(dx)}{\int_E m(x)\rho(dx)},$$

где $N_A(t)$ – число попаданий полумарковского процесса в состояние A={10x}.

Используя данную формулу, получаем формулу для расчета производительности ТЯ с мгновенно пополняемым резервом времени:

$$\Pi_{ТЯ}=\frac{\overline{\Phi}_1(0)}{M(\alpha_1\wedge\alpha_2)+\dfrac{M\beta}{\overline{G}(\tau)}+\int_0^{\infty}\overline{\Phi}_1(x)\overline{F}_1(x)dx+G(\tau)\int_0^{\infty}\overline{\Phi}_2(x)\overline{F}_2(x)dx}. \qquad (1.6)$$

Для определения производительности ТЯ $\Pi_{ТЯ}$ воспользуемся формулой:

$$\Pi_{ТЯ} = \lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t} = \frac{\int\limits_{E_0}\rho(dx)}{\int\limits_{E}\rho(dx)\int\limits_{E}m(x,\,y)P(x,dy)}, \qquad (1.7)$$

где $E_0 = \{10x\}$ – множество состояний, в которых заканчивается обработка единицы продукции; $\rho(dx)$ – стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n; n \ge 0\}$; $m(x,y)$ – средние времена пребывания в состояниях на переходах; $P(x,dy)$ – переходные вероятности ВЦМ $\{\xi_n; n \ge 0\}$.

Определим средние времена пребывания в состояниях на переходах $m(x,y)$:

$$m(1,10y) = M\alpha_1,\ m(1,\,20y) = M\alpha_2,\ m(11x,10y) = M\alpha_1,\ m(11x,\,20y) = x,$$

$$m(20x,\,21y) = M\beta,\ m(20x,\,\omega) = \tau,\ m(21x,10y) = x,\ m(21x,\,20y) = M\alpha_2,$$

$$m(\omega,1) = M\left[\beta - \tau\right]^{+} = \int\limits_0^{\infty}\frac{\overline{G}(t+\tau)}{\overline{G}(\tau)}dt.$$

Рассмотрим частный случай, когда все СВ имеют экспоненциальное распределение $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, где $i = 1,\ 2$, $G(t) = 1 - e^{-\mu t}$. В этом случае стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n; n \ge 0\}$ имеет вид:

$$\rho(1) = \rho(\omega) = \rho_0,\ \ \rho(11x) = \rho(10x) = \rho_0 e^{-\lambda_2 x}\frac{\lambda_1}{\overline{G}(\tau)},$$

$$\rho(20x) = \rho_0 e^{-\lambda_1 x}\frac{\lambda_1}{\overline{G}(\tau)},\ \ \rho(21x) = \rho_0 e^{-\lambda_1 x}\frac{\lambda_1 G(\tau)}{\overline{G}(\tau)}. \qquad (1.8)$$

С учетов формул (1.7), (1.8) получим выражение для определения производительности ТЯ:

$$\Pi_{ТЯ} = \frac{M\alpha_2\left(M\alpha_1 + M\alpha_2\right)^2}{M\alpha_1 M\alpha_2\left(\left(M\alpha_1 + M\alpha_2\right)^2 + 2M\alpha_1 M\alpha_2 + \overline{G}(\tau)(M\alpha_1)^2\right) + \left(M\beta + \tau\overline{G}(\tau)\right)\left(M\alpha_1 + M\alpha_2\right)^2}.$$

1.2. Производительность ТЯ со случайным мгновенно пополняемым резервом времени без прекращения обработки (общий случай)

Рассматривается функционирование системы S, состоящей из ТЯ, обрабатывающей продукцию и имеющей мгновенно пополняемый резерв времени. В начальный момент времени ТЯ приступает к обработке продукции. Время обработки ТЯ единицы продукции – случайная величина (СВ) α_1 с функцией распределения (ФР) $F_1(t)$ и плотностью распределения (ПР) $f_1(t)$. Время безотказной работы ТЯ – СВ α_2 с ФР $F_2(t)$ и ПР $f_2(t)$. При наступлении неисправности ТЯ, начинается ее восстановление, время восстановления ТЯ – СВ β с ФР $G(t)$ и ПР $g(t)$. ТЯ имеет случайный резерв времени δ с ФР $R(t)$ и ПР $r(t)$. Отказ системы S наступает, если время восстановления ТЯ будет больше СВ δ и продолжается до восстановления ТЯ. При этом предполагается, что к моменту восстановления ТЯ резерв времени полностью пополняется. При наступлении неисправности ТЯ обработка единицы продукции продолжается до тех пор, пока время восстановления $\beta < \delta$, в противном случае ($\beta > \delta$) – обработка единицы продукции прекращается, а после восстановления ТЯ начинается обработка новой единицы продукции. Предполагается, что СВ α_1, α_2, β, δ независимы и имеют конечные математические ожидания.

Для описания функционирования системы S используем ПМВ $\{\xi_n, \theta_n; \mathrm{n} \geq 0\}$ и соответствующий ему ПМП $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [18, 20, 16, 113]. Введем следующее множество E полумарковских состояний системы:

$$E = \{1,\ 10x,\ 11x,\ 20x,\ 21xz,\ 21x,\ 1\overline{0}xz,\ 1\overline{1}xz,\ \omega x\}, \tag{1.9}$$

где z – величина оставшегося резерва времени.

Непрерывная компонента x указывает время, до следующего изменения состояния системы. Временная диаграмма функционирования системы представлена на Рисунке 1.2.

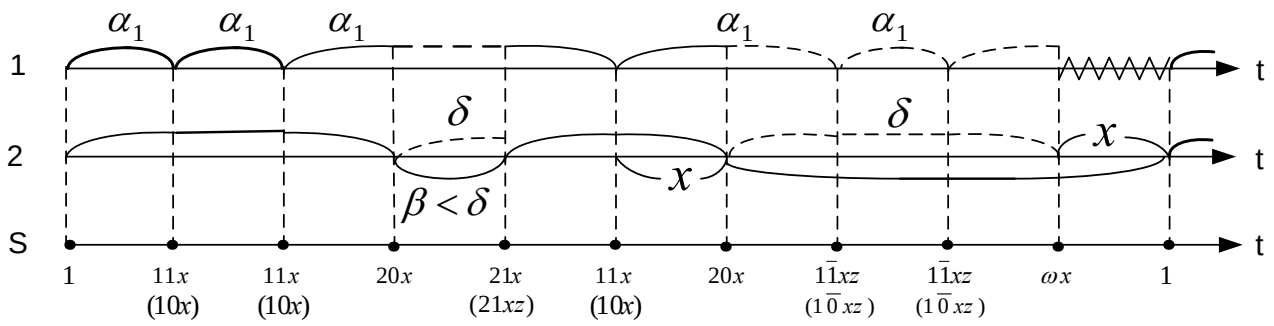


Рисунок. 1.2 – Временная диаграмма функционирования системы

Значения кодов состояний следующие:

1 – начальное состояние системы: ТЯ приступает к работе, начинается обработка единицы продукции;

10x (мгновенное состояние) – ТЯ продолжает работу, закончилась обработка единицы продукции;

11x – ТЯ продолжает работу, начинается обработка новой единицы продукции;

20x – начало восстановления ТЯ, обработка единицы продукции продолжается за счет резерва времени;

21xz (мгновенное состояние) – ТЯ закончила восстановление, обработка единицы продукции продолжается;

21x – ТЯ начинает работу, продолжается обработка новой единицы продукции;

$1\bar{0}xz$ (мгновенное состояние) – ТЯ находится на восстановлении и продолжает функционировать за счет резерва времени, закончилась обработка единицы продукции;

$1\bar{1}xz$ – ТЯ находится на восстановлении и продолжает функционировать за счет резерва времени, началась обработка новой единицы продукции;

ωx – отказ системы, резерв времени полностью исчерпан, обработка единицы продукции прекращается;

x – время до следующей смены состояния, z – величина оставшегося резерва времени.

Определим вероятности переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n; \mathrm{n} \geq 0\}$.

Возможны переходы:

$$p_1^{10x} = \int_0^\infty f_2(x+t) f_1(t)dt, \quad p_1^{20x} = \int_0^\infty f_1(x+t) f_2(t)dt, \; p_{10x}^{11x} = 1,$$

$$p_{11x}^{10dy} = f_1(x-y)dy, \; 0 < y < x, \quad p_{11x}^{20dy} = f_1(x+y)dy, \; y > 0,$$

$$p_{20x}^{1\bar{0}ys} = g(x+y)r(x+s), \; y > 0, \; s > 0,$$

$$p_{20x}^{21ys} = g(x-y)r(x-y+s), \; 0 < y < x, \; s > 0,$$

$$p_{20x}^{10y} = \int_0^x g(y+t)r(t)dt, \; y > 0, \quad p_{21x}^{10dy} = f_2(x+y)dy, \; y > 0, \quad p_{\omega x}^{1} = 1,$$

$$p_{21x}^{20dy} = f_2(x-y)dy, \; 0 < y < x, \quad p_{1\bar{1}xz}^{1\bar{0}x-t\,z-t} = f_1(t), \; 0 < t < z, \; z < x,$$

$$p_{1\bar{1}xz}^{\omega\,x-z} = \bar{F}_1(z), \; z < x, \quad p_{1\bar{1}xz}^{1\bar{0}x-t\,z-t} = f_1(t), \; 0 < t < x, \; x < z,$$

$$p_{1\bar{0}xz}^{1\bar{1}xz} = 1, \; p_{1\bar{1}xz}^{21y\,z-x} = f_1(x+y), \; y > 0, \; x < z.$$

Для определения производительности системы найдем стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n; \mathrm{n} \geq 0\}$.

Предположим, что у стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n; \mathrm{n} \geq 0\}$ существуют плотности $\rho(1)$, $\rho(10x)$, $\rho(11x)$, $\rho(20x)$, $\rho(21x)$, $\rho(21xz)$, $\rho(1\bar{0}xz)$, $\rho(1\bar{1}xz)$, $\rho(\omega x)$.

Система интегральных уравнений для стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n; \mathrm{n} \geq 0\}$ имеет следующий вид:

$$
\begin{cases}
\rho(1)=\int\limits_0^\infty \rho(\omega x)dx, \\
\rho(10x)=\rho(1)\int\limits_0^\infty f_2(x+t)\,f_1(t)dt+\int\limits_x^\infty \rho(11y)\,f_1(y-x)dy+\int\limits_0^\infty \rho(21y)\,f_2(x+y)dy, \\
\rho(11x)=\rho(10x), \\
\rho(20x)=\rho(1)\int\limits_0^\infty f_1(x+t)\,f_2(t)dt+\int\limits_0^\infty \rho(11y)\,f_1(x+y)dy+\int\limits_x^\infty \rho(21y)\,f_2(y-x)dy, \\
\rho(21x)=\int\limits_x^\infty \rho(20y)g(y-x)\bar{R}(y-x)dy+\int\limits_0^\infty dy\int\limits_y^\infty \rho(1\,\bar{1}\,yz)\,f_1(x+y)dz, \\
\rho(21xz)=\int\limits_x^\infty \rho(20y)g(y-x)r(y-x+z)dy+\int\limits_0^\infty \rho(1\,\bar{1}t\;z+t)\,f_1(x+y)dt, \\
\rho(1\bar{0}xz)=\int\limits_0^\infty \rho(1\,\bar{1}x+t\;z+t)\,f_1(t)dt+\int\limits_0^\infty \rho(20y)g(y+x)r(y+z)dy, \\
\rho(1\,\bar{1}xz)=\rho(1\bar{0}xz), \\
\rho(\omega x)=\int\limits_0^\infty \rho(20y)dy\int\limits_0^y g(x+t)r(t)dt+\int\limits_0^\infty \rho(1\,\bar{1}x+t\,t)\bar{F}_1(t)dt, \\
\textit{условие нормировки}.
\end{cases}
\tag{1.10}
$$

Введем обозначения:

$$\rho(10x)=\rho(11x)=\varphi_1(x),\;\;\rho(20x)=\varphi_2(x),\;\;\rho(21x)=\varphi_3(x),$$

$$\rho(1\,\bar{1}xz)=\rho(1\bar{0}xz)=\varphi_4(x,z),\;\;\rho(\omega x)=\varphi_5(x),\;\;\rho(1)=\rho_0.$$

$$\rho(21x)=\int\limits_0^\infty \rho(21xz)dz.$$

Тогда система уравнений (1.10) принимает вид:

$$\begin{cases} \rho_0 = \int\limits_0^\infty \varphi_5(x)dx, \\ \varphi_1(x) = \rho_0 \int\limits_0^\infty f_2(x+t)\, f_1(t)dt + \int\limits_x^\infty \varphi_1(y)\, f_1(y-x)dy + \int\limits_0^\infty \varphi_3(y)\, f_2(x+y)dy, \\ \varphi_2(x) = \rho_0 \int\limits_0^\infty f_1(x+t)\, f_2(t)dt + \int\limits_0^\infty \varphi_1(y)\, f_1(x+y)dy + \int\limits_x^\infty \varphi_3(y)\, f_2(y-x)dy, \\ \varphi_3(x) = \int\limits_x^\infty \varphi_2(y) g(y-x)\bar{R}(y-x)dy + \int\limits_0^\infty f_1(x+y)dy \int\limits_y^\infty \varphi_4(y,z)dz, \\ \varphi_4(x,z) = \int\limits_0^\infty \varphi_4(x+t, z+t)\, f_1(t)dt + \int\limits_0^\infty \varphi_2(y) g(y+x) r(y+z)dy, \\ \varphi_5(x) = \int\limits_0^\infty \varphi_2(y)dy \int\limits_0^y g(x+t) r(t)dt + \int\limits_0^\infty \varphi_4(x+t,t)\bar{F}_1(t)dt, \\ + \textit{условие нормировки}. \end{cases} \tag{1.11}$$

Решение системы (1.11) представлено в **Приложении В**.

Получим

$$\varphi_2(x) = \rho_0 \Bigg[\int\limits_0^\infty f_2(t) v_{f_1}(t,x)dt + \int\limits_x^\infty h_T(y-x)dy \int\limits_0^\infty f_2(t) v_{f_1}(t,y)dt + \\ + \int\limits_0^\infty \tilde{\tilde{\pi}}(x,y)dy \int\limits_0^\infty f_2(t) v_{f_1}(t,y)dt + \int\limits_0^\infty \tilde{\tilde{\pi}}(x,y)dy \int\limits_y^\infty h_T(s-y)ds \int\limits_0^\infty f_2(t) v_{f_1}(t,s)dt \Bigg]. \tag{1.12}$$

Или $\varphi_2(x) = \rho_0 \Psi(x)$, где

$$\Psi(x) = \int\limits_0^\infty f_2(t) v_{f_1}(t,x)dt + \int\limits_x^\infty h_T(y-x)dy \int\limits_0^\infty f_2(t) v_{f_1}(t,y)dt + \\ + \int\limits_0^\infty \tilde{\tilde{\pi}}(x,y)dy \int\limits_0^\infty f_2(t) v_{f_1}(t,y)dt + \int\limits_0^\infty \tilde{\tilde{\pi}}(x,y)dy \int\limits_y^\infty h_T(s-y)ds \int\limits_0^\infty f_2(t) v_{f_1}(t,s)dt.$$

Зная $\varphi_2(x)$, можно найти решение системы уравнений (1.11), последовательной подстановкой.

Рассмотрим случай, когда время обработки ТЯ единицы продукции, время безотказной работы ТЯ, время восстановления ТЯ имеют экспоненциальное распределение с функциями распределения $F_1(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$, $F_2(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t}$,

$G(t)=1-e^{-\mu t}$. Резерв времени является случайным и имеет экспоненциальное распределение с ФР $R(t)=1-e^{-ht}$.

Тогда решение системы (1.11) принимает вид:

$$\begin{cases} \rho(1)=\rho_0, \\ \rho(11x)=\rho(10x)=\varphi_1(x)=\rho_0\dfrac{\lambda_1(h+\mu)}{h}e^{-\lambda_2 x}, \\ \rho(10x)=\varphi_2(x)=\rho_0\dfrac{\lambda_1(h+\mu)}{h}e^{-\lambda_1 x}, \\ \rho(1\overline{1}xz)=\rho(1\overline{0}xz)=\varphi_4(x,z)=\rho_0\lambda_1\mu e^{-\mu x}e^{-hz}, \\ \rho(21xz)=\rho_0\lambda_1\mu e^{-\lambda_1 x}e^{-hz}, \\ \rho(21x)=\varphi_3(x)=\rho_0\dfrac{\lambda_1\mu}{h}e^{-\lambda_1 x}, \\ \rho(\omega x)=\varphi_5(x)=\rho_0\mu e^{-\mu x}, \end{cases} \tag{1.13}$$

Для нахождения производительности технологической ячейки $П_{ТЯ}$ воспользуемся формулой, полученной в [62]:

$$П_{ТЯ}=\lim_{t\to\infty}\frac{N_A(t)}{t}=\frac{\int\limits_A \rho(dx)}{\int\limits_E m(x)\rho(dx)}, \tag{1.14}$$

где

$\rho(dx)$ – стационарное распределение ВЦМ,

m(x) – средние времена пребывания полумарковского процесса в состояниях,

$N_A(t)$ – число попаданий полумарковского процесса в подмножество состояний $A=\{10x,1\overline{0}xz\}$.

При попадании полумарковского процесса в состояния этого подмножества происходит окончание обработки единицы продукции.

Тогда

$$П_{ТЯ}=\frac{\lambda_1\mu(\lambda_2+\mu+h)}{(\lambda_2+\mu)(\mu+h)}. \tag{1.15}$$

1.3. Анализ влияния резерва времени на производительность ТЯ

Рассматривается функционирование системы S, состоящей из ТЯ, обрабатывающей продукцию и имеющей случайный мгновенно пополняемый резерв времени. В начальный момент времени ТЯ приступает к обработке продукции. Время обработки ТЯ единицы продукции – случайная величина (СВ) α_1 с функцией распределения (ФР) $F_1(t) = P(\alpha_1 \le t)$ и плотностью распределения (ПР) $f_1(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$. Время безотказной работы ТЯ – СВ α_2 с ФР $F_2(t) = P(\alpha_2 \le t)$ и ПР $f_2(t) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$. При наступлении неисправности ТЯ, начинается ее восстановление, время восстановления ТЯ – СВ β с ФР $G(t) = P(\beta \le t)$ и ПР $g(t) = \mu e^{-\mu t}$. Резервом времени является СВ δ с ФР R(t)=P(δ ≤t) и ПР r(t). Отказ системы S наступает в момент времени, когда время восстановления ТЯ станет больше резерва времени и продолжается до восстановления ТЯ. При этом предполагается, что к моменту восстановления ТЯ резерв времени полностью восстанавливается. При наступлении неисправности ТЯ обработка единицы продукции продолжается за счет резерва времени, пока не наступит отказ системы. Затем после восстановления ТЯ начинается обработка новой единицы продукции. Предполагается, что СВ α1, α2, β, δ независимы и имеют конечные математические ожидания.

Для описания функционирования системы S используем процесс Марковского восстановления (ПМВ) $\{\xi_n, \theta_n; n \ge 0\}$ и соответствующий ему полумарковский процесс (ПМП) $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [18, 20, 16, 113]. Введем следующее множество E полумарковских состояний системы:

$$E = \{1, 10, 11, 20, 21, 1\overline{0}x, 1\overline{1}x, \omega\}.$$

Опишем значения кодов состояний:

1 – ТЯ работоспособна, началась обработка единицы продукции;

10 – ТЯ работоспособна, закончилась обработка единицы продукции (мгновенное состояние);

11 – ТЯ работоспособна, началась обработка новой единицы продукции;

20 – началось восстановление ТЯ, продолжается обработка единицы продукции за счет резерва времени, система работоспособна;

21 – закончилось восстановление ТЯ, продолжается обработка, резерв времени мгновенно пополняется;

$1\overline{0}x$ – идет восстановление ТЯ, окончена обработка единицы продукции за счет резерва времени, система работоспособна (мгновенное состояние); x – время до окончания восстановления ТЯ;

$1\overline{1}x$ – продолжается восстановление ТЯ, началась обработка новой единицы продукции за счет резерва времени, система работоспособна; x – время до окончания восстановления ТЯ;

ω – идет восстановление ТЯ, резерв времени закончился, обработка единицы продукции прекращается, отказ системы.

1.3.1 Система уравнений для нахождения стационарного распределения

Для нахождения стационарных характеристик системы важно найти стационарное распределение вложенной цепи Марковы (ВЦМ) $\{\xi_n; n > 0\}$.

Общее уравнение для нахождения стационарного распределения следующее:

$$\rho(B) = \int_E \rho(dx) P(x, B), \tag{1.16}$$

где $P(x, B)$ – переходные вероятности ВЦМ.

Пусть $\rho(1), \rho(\omega), \rho(10), \rho(11), \rho(20), \rho(21)$ – значения стационарного распределения в состояниях $1, \omega, 10, 11, 20, 21$ и предположим существование стационарных плотностей $\rho(1\overline{0}x), \rho(1\overline{1}x)$.

Тогда система уравнений для стационарного распределения имеет следующий вид:

$$
\begin{cases}
\rho(1)=\rho(\omega)=\rho_0, \\
\rho(10)=\rho_0\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}+\rho(11)\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}+\rho(21)\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}, \\
\rho(11)=\rho(10), \\
\rho(20)=\rho_0\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}+\rho(11)\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}+\rho(21)\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}, \\
\rho(21)=\rho(20)\int\limits_0^\infty \mu e^{-\mu t}e^{-\lambda_1 t}\overline{R}(t)dt+\int\limits_0^\infty \rho(1\overline{0}y)dy\int\limits_0^y \mu e^{-(\mu+\lambda_1)t}dt, \\
\rho(1\overline{0}x)=\int\limits_x^\infty \rho(1\overline{0}y)\lambda_1 e^{-(\mu+\lambda_1)(y-x)}dy+\rho(20)\int\limits_0^\infty \lambda_1 e^{-(\mu+\lambda_1)t}r(x+t)dt, \\
\rho(1\overline{1}x)=\rho(1\overline{0}x), \\
\rho(\omega)=\rho(20)\int\limits_0^\infty e^{-(\mu+\lambda_1)t}r(t)dt+\int\limits_0^\infty \rho(1\overline{0}x)e^{-(\mu+\lambda_1)x}dx, \\
\rho(1)+\rho(\omega)+\rho(11)+\rho(10)+\rho(20)+ \\
+\rho(21)+\int\limits_0^\infty \rho(1\overline{0}x)dx+\int\limits_0^\infty \rho(1\overline{1}x)dx=1.
\end{cases}
\tag{1.17}
$$

Последнее уравнение системы является условием нормировки.

1.3.2 Случай резерва времени общего вида

Пусть резерв времени имеет распределение общего вида R(t)=P(δ≤t). Методом последовательных приближений получаем, что решение системы (1.17) в этом случае имеет вид:

$$
\begin{cases}
\rho(1) = \rho(\omega) = \rho_0, \\
\rho(10) = \rho_0 \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \mu \int\limits_0^\infty \bar{R}(t) h_{\tilde{g}}(\mathrm{t}) dt}, \\
\rho(11) = \rho(10), \\
\rho(20) = \rho_0 \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \mu \int\limits_0^\infty \bar{R}(t) h_{\tilde{g}}(\mathrm{t}) dt}, \\
\rho(21) = \rho_0 \dfrac{\mu \int\limits_0^\infty \bar{R}(t) h_{\tilde{g}}(\mathrm{t}) dt}{\lambda_1 - \mu \int\limits_0^\infty \bar{R}(t) h_{\tilde{g}}(\mathrm{t}) dt}, \\
\rho(1\bar{0}x) = \rho_0 \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \mu \int\limits_0^\infty \bar{R}(t) h_{\tilde{g}}(\mathrm{t}) dt} \int\limits_0^\infty r(x+t) h_{\tilde{g}}(\mathrm{t}) dt, \\
\rho(1\bar{1}x) = \rho(1\bar{0}x), \\
\rho(\omega) = \rho_0 \dfrac{\lambda_1 \left[\int\limits_0^\infty e^{-(\mu+\lambda_1)t} r(t) dt + \int\limits_0^\infty e^{-(\mu+\lambda_1)x} dx \int\limits_0^\infty r(x+t) h_{\tilde{g}}(\mathrm{t}) dt \right]}{\lambda_1 - \mu \int\limits_0^\infty \bar{R}(t) h_{\tilde{g}}(\mathrm{t}) dt},
\end{cases}
\tag{1.18}
$$

где

$\bar{R}(t) = 1 - R(t)$, $\tilde{g}(t) = \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\mu)t}$,

$h_{\tilde{g}}(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{g}^{*(n)}(t)$, где $\tilde{g}^{*(n)}(t)$ – n-кратная свертка функции $\tilde{g}(t)$.

Для функции $h_{\tilde{g}}(t)$ верно уравнение

$$h_{\tilde{g}}(t) = \tilde{\mathrm{g}}(\mathrm{t}) + (\tilde{\mathrm{g}} * h_{\tilde{g}})(t) \ ,$$

которое может быть использовано для ее нахождения.

Постоянная ρ_0 находится из условия нормировки. Она не входит в окончательные формулы производительности ТЯ.

Для нахождения производительности технологической ячейки $П_{ТЯ}$ воспользуемся формулой (1.14):

$$\Pi_{ТЯ} = \lim_{t\to\infty} \frac{N_A(t)}{t} = \frac{\int\limits_A \rho(dx)}{\int\limits_E m(x)\rho(dx)},$$

где $\rho(dx)$ – стационарное распределение ВЦМ, которое определяется формулой (1.18),

m(x) – средние времена пребывания полумарковского процесса в состояниях,

$N_A(t)$ – число попаданий полумарковского процесса в подмножество состояний

$$A = \{10x, 1\overline{0}x\}.$$

При попадании полумарковского процесса в состояния этого подмножества происходит окончание обработки единицы продукции.

Средние времена пребывания в состояниях системы (1.17) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\theta(1) = \theta(21) = \theta(11) = \lambda_1 \wedge \lambda_2, \qquad \theta(10) = \theta(1\overline{0}x) = 0, \\ &\theta(1\overline{1}x) = \lambda_1 \wedge \beta \wedge x, \qquad\qquad \theta(\omega) = \beta, \end{aligned} \tag{1.19}$$

где ∧ - символ минимума.

Средние времена пребывания полумарковского процесса в состояниях m(x) находятся по формулам:

$$\begin{aligned} &m(1) = m(21) = m(11) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \qquad m(10) = m(1\overline{0}x) = 0, \\ &m(1\overline{1}x) = \int\limits_0^x \overline{F}_1(t)\overline{G}(t)dt, \qquad\qquad m(\omega) = M\beta. \end{aligned} \tag{1.20}$$

В этом случае, используя стационарное распределение системы (1.17) и средние времена пребывания в состояниях (1.20), производительность ТЯ вычисляется по формуле:

$$\Pi_{ТЯ} = \frac{\mu}{\mu + \lambda_2}(\lambda_1 + \lambda_2 \int\limits_0^\infty \overline{R}(t) h_{\tilde{g}}(t)dt). \tag{1.21}$$

Используя формулу (1.21), найдем формулы производительности ТЯ для частных случаев законов распределения резерва времени.

1.3.3 Случай экспоненциального резерва времени

Рассмотрим случай, когда резерв времени является случайным и имеет экспоненциальное распределение с ФР $R(t) = 1 - e^{-\tau t}$.

В этом случае решение системы (1.17) имеет вид:

$$\begin{cases} \rho(1) = \rho(\omega) = \rho_0, \\ \rho(10) = \rho(11) = \rho_0 \dfrac{\lambda_1(\mu + \tau)}{\lambda_2 \tau}, \\ \rho(20) = \rho_0 \dfrac{\mu + \tau}{\tau}, \\ \rho(21) = \rho_0 \dfrac{\mu}{\tau}, \\ \rho(1\overline{0}) = \rho_0 \dfrac{\lambda_1}{\tau}, \\ \rho(1\overline{1}) = \rho(1\overline{0}). \end{cases} \tag{1.22}$$

Используя стационарное распределение и формулу (1.14) получаем формулу для производительности ТЯ:

$$\Pi_{ТЯ} = \frac{\lambda_1 \mu(\lambda_2 + \mu + \tau)}{(\lambda_2 + \mu)(\mu + \tau)}. \tag{1.23}$$

Отметим, что формула (1.23) совпадает с формулой (1.15), при $\tau = h$.

1.3.4 Случай постоянного резерва времени

Рассмотрим случай, когда резерв времени является постоянным, то есть $\delta = \tau = const$. В этом случае $\mathrm{R}(t) = 1(t - \tau)$.

Решение системы (1.17) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \rho_0 = \rho(\omega) = \rho(1), \\ \rho(10) = \rho(11) = \rho_0 \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{\mu\tau}, \\ \rho(20) = \rho_0 e^{\mu\tau}, \\ \rho(21) = \rho_0 (e^{\mu\tau} - 1), \\ \rho(1\overline{0}) = \rho(1\overline{1}) = \rho_0 \dfrac{\lambda_1}{\mu}(e^{\mu\tau} - 1). \end{cases} \tag{1.24}$$

Подставляя полученные стационарные распределения в (1.18) получим следующую формулу:

$$\Pi_{ТЯ} = \frac{\lambda_1}{\mu + \lambda_2}(\mu + \lambda_2(1 - \mathrm{e}^{-\mu\tau})). \tag{1.25}$$

Проанализируем на примере влияние резерва времени на производительность ТЯ, используя формулу (1.25).

Пример, пусть $M\alpha_1 = \frac{1}{12}ч., M\alpha_2 = \frac{1}{2}ч., M\beta = \frac{1}{3}ч.$, то есть $\lambda_1 = 12(1/ч), \lambda_2 = 2(1/ч), \mu = 3(1/ч)$, а резерв времени изменяется от 0 до 2 часов с шагом 0,2 часа.

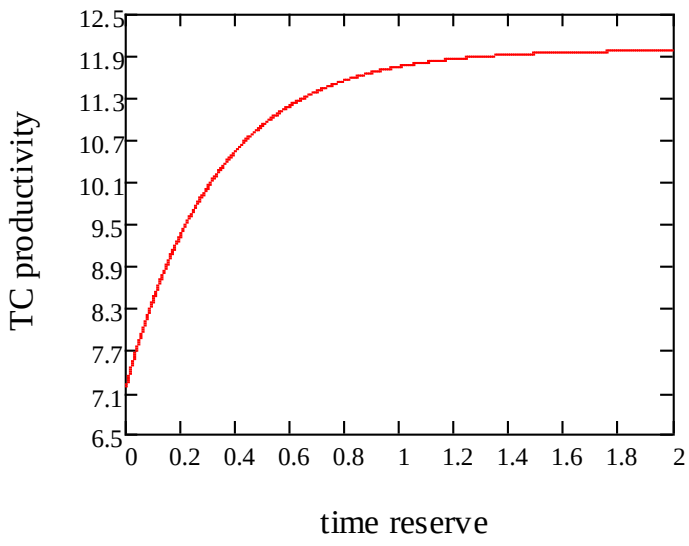


Рисунок 1.3 – Влияние резерва времени на производительность ТЯ

На Рисунке 1.3 показано влияние резерва времени на производительность технологической ячейки. В этом случае производительность ТЯ без резерва времени составляет 7,2 штук/час. Из формул (1.21), (1.23) и Рисунка 1.3 видно, что резерв времени существенно влияет на производительность ТЯ.

Выводы по Главе 1

Построены математические модели для производительности ТЯ с учетом наличия мгновенно пополняемого резерва времени с прекращением обработки и без прекращения обработки единицы продукции. Получены аналитические формулы для производительности ТЯ в рассматриваемых случаях.

В монографии [15] проведен анализ влияния резерва времени на надежность технологической ячейки (ТЯ), в монографии [14] получены формулы производительности ТЯ с прекращением и без прекращения обработки единицы продукции. В данной главе проанализировано влияние мгновенно пополняемого резерва времени на производительность ТЯ. Следует отметить, что полученные выражения для производительности ТЯ при отсутствии резерва времени совпадают с выражениями, представленными в [14].

Полученные аналитические выражения производительности ТЯ обладают универсальностью и могут быть использованы для расчета оптимальной величины резерва времени.

Глава 2. Полумарковские модели двухкомпонентных систем с поэлементным резервом времени

В данной главе на основе теории полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний рассматриваются полумарковские модели двухкомпонентных систем с поэлементным мгновенно пополняемым резервом времени.

В параграфе 2.1 построена модель двухкомпонентной системы с поэлементным резервом времени с функциями распределения случайных величин общего вида.

В параграфе 2.2 определяются характеристики надежности рассматриваемой в 2.1 системы, используя алгоритм стационарного фазового укрупнения.

Используя, приближенный метод, разработанный в [16], в параграфе 2.3 приближенно находятся стационарные характеристики двухкомпонентной системы, у которой резерв времени есть только у одного элемента.

Находятся стационарные характеристики надёжности рассматриваемых систем, проводится анализ влияния величины резерва времени на полученные характеристики.

2.1. Двухкомпонентная система. Точное решение

Рассматривается система S, состоящая из 2-х элементов, времена безотказной работы которых случайные величины (СВ) α_i с функциями распределения (ФР) $F_i(t)$, а времена восстановления – СВ β_i с ФР $G_i(t)$, $i=\overline{1,2}$. Каждый элемент системы имеет случайный мгновенно пополняемый резерв времени τ_i с ФР $R_i(t)$. СВ α_i, β_i, τ_i предполагаются независимыми в совокупности, имеющими конечные математические ожидания; ФР $F_i(t)$, $G_i(t)$, $R_i(t)$ – имеющими плотности $f_i(t)$, $g_i(t)$, $r_i(t)$.

Резерв времени начинает использоваться в момент начала восстановления элемента. Отказ системы S наступает тогда, когда оба элемента восстанавливаются и полностью израсходован резерв времени для каждого элемента. Он продолжается до восстановления одного из отказавших элементов, при этом резерв времени у восстановленного элемента мгновенно пополняется до уровня τ_i.

2.1.1. Построение полумарковской модели системы

Для описания функционирования системы S используем полумарковский процесс $\xi(t)$ [18, 20] с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний.

Введем фазовое пространство состояний вида:

$$E = \{1, i\overline{d}x : \overline{d} = (d_1, d_2),\ x > 0\}, \tag{2.1}$$

где 1 – начальное состояние системы, $i = \overline{1,2}$ – номер элемента, в котором произошло изменение состояния. Компонента d_k вектора $\overline{d}$ описывает физическое состояние элемента с номером k:

$$d_k = \begin{cases} 1, \text{ если к– ый элемент работоспособен,} \\ \overline{1}, \text{ если к– ый элемент восстанавливается и} \\ \quad \text{функционирует за счет резерва времени,} \\ 0, \text{ если к– ый элемент находится в отказе.} \end{cases}$$

Непрерывная компонента x указывает время, прошедшее с момента последнего изменения состояния системы. Временная диаграмма функционирования системы представлена на Рисунке 2.1.

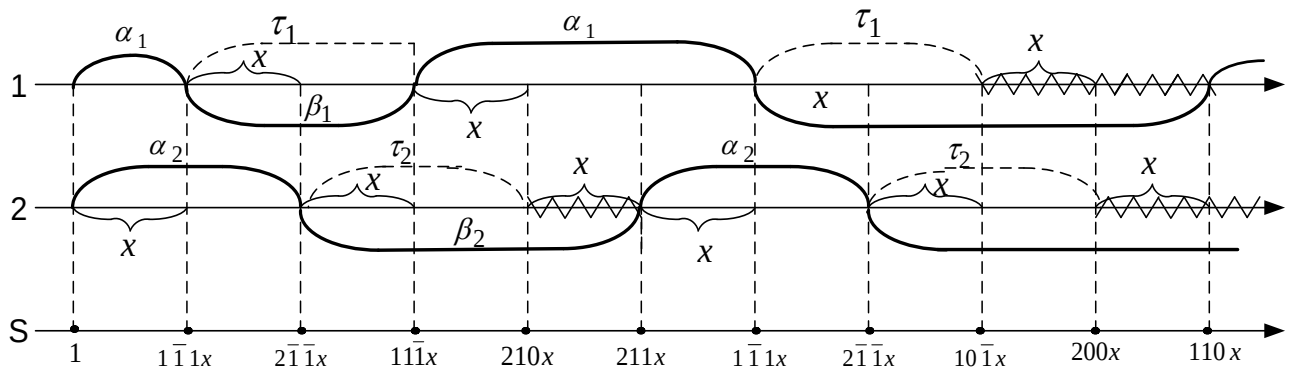


Рисунок. 2.1 – Временная диаграмма функционирования системы

Построим процесс марковского восстановления $\{\xi_n, \theta_n; \mathrm{n} \geq 0\}$ [18-20], описывающий функционирование системы S.

Определим вероятности переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n; \mathrm{n} \geq 0\}$. Введем обозначения:

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t), \quad \bar{i} = \begin{cases} 2, & i = 1, \\ 1, & i = 2. \end{cases}.$$

1. Рассмотрим случай состояний id_1d_2x, $d_i = \bar{1}$, $d_{\bar{i}} = 1$.

В этом случае возможны следующие переходы:

а) $id_1d_2x \to id_1'd_2'y$ в условиях: $d_k' = d_k$ при $k \neq i$, $d_i' = 1$, $y > x$. Плотность вероятности перехода в этом случае вычисляется по формуле:

$$p_{id_1d_2x}^{id_1'd_2'y} = \frac{g_i(y-x)\bar{R}_i(y-x)\bar{F}_{\bar{i}}(y)}{\bar{F}_{\bar{i}}(x)}, \tag{2.2}$$

б) $id_1d_2x \to id_1'd_2'y$, где $d_k' = d_k$ при $k \neq i$, $d_i' = 0$, $y > x$. Тогда:

$$p_{id_1d_2x}^{id_1'd_2'y} = \frac{r_i(y-x)\bar{G}_i(y-x)\bar{F}_{\bar{i}}(y)}{\bar{F}_{\bar{i}}(x)}, \tag{2.3}$$

в) $id_1d_2x \to \bar{i}d_1'd_2'y$ в условиях: $d_k' = d_k$ при $k \neq i$, $d_{\bar{i}}' = \bar{1}$, $y > 0$. В этом случае:

$$p_{id_1d_2x}^{\bar{i}d_1'd_2'y} = \frac{f_{\bar{i}}(y+x)\bar{G}_i(y)\bar{R}_i(y)}{\bar{F}_{\bar{i}}(x)}. \tag{2.4}$$

2. Рассмотрим состояния id_1d_2x, $d_1 = d_2 = 0$.

Возможны переходы:

а) $id_1d_2x \to id_1'd_2'y$ в условиях: $d_k' = d_k$ при $k \neq i$, $d_i' = 1$, $y > x$. Плотность вероятности перехода вычисляется по формуле:

$$p_{id_1d_2x}^{id_1'd_2'y} = \frac{\int_0^\infty r_i(t)g_i(y-x+t)dt\int_0^\infty r_{\bar{i}}(t)\bar{G}_{\bar{i}}(y+t)dt}{P(\beta_i > \tau_i)\int_0^\infty r_{\bar{i}}(t)\bar{G}_{\bar{i}}(x+t)dt}, \tag{2.5}$$

б) $id_1d_2x \to \bar{i}d_1'd_2'y$, где $d_k' = d_k$ при $k \neq i$, $d_{\bar{i}}' = 1$, $y > 0$. Тогда:

$$p_{id_1d_2x}^{\bar{i}d_1'd_2'y} = \frac{\int_0^\infty r_{\bar{i}}(t)g_{\bar{i}}(y-x+t)dt\int_0^\infty r_i(t)\bar{G}_i(y+t)dt}{P(\beta_i > \tau_i)\int_0^\infty r_{\bar{i}}(t)\bar{G}_{\bar{i}}(x+t)dt}. \tag{2.6}$$

3. Рассмотрим случай состояний id_1d_2x, $d_1 = d_2 = \bar{1}$.

а) $id_1d_2x \to id_1'd_2'y$, где: $d_k' = d_k$ при $k \neq i$, $d_i' = 1$, $y > x$. Плотность вероятности перехода в этом случае определяется формулой:

$$p_{id_1d_2x}^{id_1'd_2'y} = \frac{g_i(y-x)\bar{R}_i(y-x)\bar{G}_{\bar{i}}(y)\bar{R}_{\bar{i}}(y)}{\bar{G}_{\bar{i}}(x)\bar{R}_{\bar{i}}(x)}, \tag{2.7}$$

б) $id_1d_2x \to id_1'd_2'y$ в условиях: $d_k' = d_k$ при $k \neq i$, $d_i' = 0$, $y > x$. В этом случае:

$$p_{id_1d_2x}^{id_1'd_2'y} = \frac{r_i(y-x)\bar{G}_i(y-x)\bar{G}_{\bar{i}}(y)\bar{R}_{\bar{i}}(y)}{\bar{G}_{\bar{i}}(x)\bar{R}_{\bar{i}}(x)}, \tag{2.8}$$

в) $id_1d_2x \to \bar{i}d_1'd_2'y$, где $d_k' = d_k$ при $k \neq i$, $d_{\bar{i}}' = 1$, $y > 0$. Тогда:

$$p_{id_1d_2x}^{\bar{i}d_1'd_2'y} = \frac{g_{\bar{i}}(y+x)\bar{R}_{\bar{i}}(y+x)\bar{G}_i(y)\bar{R}_i(y)}{\bar{G}_{\bar{i}}(x)\bar{R}_{\bar{i}}(x)}. \tag{2.9}$$

г) $id_1d_2x \to \bar{i}d_1'd_2'y$ в условиях: $d_k' = d_k$ при $k \neq i$, $d_{\bar{i}}' = 0$, $y > 0$. Имеем:

$$p_{id_1d_2x}^{\bar{i}d_1'd_2'y} = \frac{r_{\bar{i}}(y+x)\bar{G}_{\bar{i}}(y+x)\bar{G}_i(y)\bar{R}_i(y)}{\bar{G}_{\bar{i}}(x)\bar{R}_{\bar{i}}(x)}. \tag{2.10}$$

Для остальных состояний системы вероятности переходов определяются аналогичным образом.

2.1.2. Нахождение стационарного распределения и средних времен пребывания в состояниях ВЦМ

Для определения стационарных характеристик надежности системы найдем стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n; \mathrm{n} \geq 0\}$.

Предположим, что у стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n; \mathrm{n} \geq 0\}$ существуют плотности $\rho(id_1d_2x)$.

Введем следующие замены:

$$\tilde{\rho}(id_1d_2x) = \frac{\rho(id_1d_2x)}{\bar{F}_{\bar{i}}(x)}, \quad d_{\bar{i}} = 1, \quad \tilde{\rho}(id_1d_2x) = \frac{\rho(id_1d_2x)}{\bar{R}_{\bar{i}}(x)\bar{G}_{\bar{i}}(x)}, \quad d_{\bar{i}} = \bar{1},$$

$$\tilde{\rho}(id_1d_2x) = \frac{\rho(id_1d_2x)}{\dfrac{\int_0^\infty r_{\bar{i}}(t)\bar{G}_{\bar{i}}(x+t)dt}{P(\beta_{\bar{i}} > \tau_{\bar{i}})}}, \quad d_{\bar{i}} = 0.$$

Система интегральных уравнений для стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n; \mathrm{n} \geq 0\}$ имеет следующий вид:

1. В случае $d_i' = 1,\ d_{\bar{i}}' = d_{\bar{i}}$:

$$\tilde{\rho}(id_1d_2x) = \int_0^x \tilde{\rho}(id_1'd_2'y)\, f_i(x-y)dy + \int_0^\infty \tilde{\rho}(id_1'd_2'y)\, f_i(x+y)dy, \tag{2.11}$$

2. Если $d_i' = \bar{1},\ d_{\bar{i}}' = d_{\bar{i}}$, то

$$\tilde{\rho}(id_1d_2x) = \int_0^x \tilde{\rho}(id_1'd_2'y) r_i(x-y)\bar{G}_i(x-y)dy + \int_0^\infty \tilde{\rho}(id_1'd_2'y) r_i(x+y)\bar{G}_i(x+y)dy, \tag{2.12}$$

3. При $d_i' = \bar{1},\ d_{\bar{i}}' = d_{\bar{i}} = 0,$ имеем

$$\tilde{\rho}(id_1d_2x) = \int_0^x \tilde{\rho}(id_1'd_2'y) g_i(x-y)\bar{R}_i(x-y)dy + \int_0^\infty \tilde{\rho}(id_1'd_2'y) g_i(x+y)\bar{R}_i(x+y)dy, \tag{2.13}$$

4. Если $d_i = 1,\ d_i' = \overline{1},\ d_i'' = 0,\ d_{\bar{i}}' = d_{\bar{i}}'' = d_{\bar{i}} \neq 0$, получаем

$$\tilde{\rho}(id_1d_2x) = \int_0^x \tilde{\rho}(id_1'd_2'y)g_i(x-y)\overline{R}_i(x-y)dy + \int_0^\infty \tilde{\rho}(id_1'd_2'y)g_i(x+y)\overline{R}_i(x+y)dy +$$

$$+\int_0^x \tilde{\rho}(id_1''d_2''y)dy\frac{\int_0^\infty r_i(t)g_i(x-y+t)dt}{P(\beta_i > \tau_i)} + \int_0^\infty \tilde{\rho}(id_1''d_2''y)dy\frac{\int_0^\infty r_i(t)g_i(x+y+t)dt}{P(\beta_i > \tau_i)}, \tag{2.14}$$

5. $\int_E \rho(i\bar{d}x)dx = 1$. (условие нормировки). (2.1.15)

Подстановкой можно убедиться, что стационарное распределение ВЦМ имеет вид:

$$\rho(id_1d_2x) = c\rho_i\rho_{\bar{i}}\overline{F}_{\bar{i}}(x),\quad d_{\bar{i}} = 1, \tag{2.16}$$

$$\rho(id_1d_2x) = c\rho_i\rho_{\bar{i}}p_i\overline{R}_{\bar{i}}(x)\overline{G}_{\bar{i}}(x),\quad d_{\bar{i}} = \overline{1}, \tag{2.17}$$

$$\rho(id_1d_2x) = \frac{c\rho_i\rho_{\bar{i}}p_{\bar{i}}\int_0^\infty r_{\bar{i}}(t)\overline{G}_{\bar{i}}(x+t)dt}{P(\beta_{\bar{i}} > \tau_{\bar{i}})},\quad d_{\bar{i}} = 0, \tag{2.18}$$

$$\rho(id_1d_2x) = \frac{c\rho_i\rho_{\bar{i}}p_ip_{\bar{i}}\int_0^\infty r_{\bar{i}}(t)\overline{G}_{\bar{i}}(x+t)dt}{P(\beta_{\bar{i}} > \tau_{\bar{i}})},\quad d_i = d_{\bar{i}} = 0, \tag{2.19}$$

где $p_i = P(\beta_i > \tau_i) = \int_0^\infty \overline{G}_i(t)r_i(t)dt$, $\rho_i = const$, которая равна $\rho_i = \dfrac{1}{2+p_i}$, константа c находится из условия нормировки.

Вычислим средние времена пребывания в состояниях ВЦМ.

1. В случае $d_i = d_{\bar{i}} = 1$

$$\theta_{id_1d_2x} = \alpha_i \wedge [\alpha_{\bar{i}} - x]^+,\quad M\theta_{id_1d_2x} = \int_0^\infty \frac{\overline{F}_i(t)\overline{F}_{\bar{i}}(x+t)}{\overline{F}_{\bar{i}}(x)}dt.$$

2. Если $d_i = \overline{1}, d_{\bar{i}} = 1$, то

$$\theta_{id_1d_2x} = \beta_i \wedge \tau_i \wedge [\alpha_{\bar{i}} - x]^+,\quad M\theta_{id_1d_2x} = \int_0^\infty \frac{\overline{G}_i(t)\overline{R}_i(t)\overline{F}_{\bar{i}}(x+t)}{\overline{F}_{\bar{i}}(x)}dt.$$

3. Пусть $d_i = d_{\bar{i}} = \overline{1}$, тогда

$$\theta_{id_1d_2x} = \beta_i \wedge \tau_i \wedge [\beta_{\bar{i}} - x]^+ \wedge [\tau_{\bar{i}} - x]^+,$$

$$M\theta_{id_1d_2x} = \int_0^\infty \frac{\bar{G}_i(t)\bar{R}_i(t)\bar{G}_{\bar{i}}(x+t)\bar{R}_{\bar{i}}(x+t)}{\bar{G}_{\bar{i}}(x)\bar{R}_{\bar{i}}(x)} dt .$$

4. В случае $d_i = 0,\ d_{\bar{i}} = 1$

$$\theta_{id_1d_2x} = [\beta_i - \tau_i]^+ \wedge [\alpha_{\bar{i}} - x]^+,\ M\theta_{id_1d_2x} = \int_0^\infty \frac{\bar{F}_{\bar{i}}(x+t)}{\bar{F}_{\bar{i}}(x)P(\beta_i > \tau_i)} dt \int_0^\infty r_i(z)\bar{G}_i(t+z)dz .$$

5. Если $d_i = 1, d_{\bar{i}} = \bar{1}$, то

$$\theta_{id_1d_2x} = \alpha_i \wedge [\beta_{\bar{i}} - x]^+ \wedge [\tau_{\bar{i}} - x]^+, \quad M\theta_{id_1d_2x} = \int_0^\infty \frac{\bar{F}_i(t)\bar{G}_{\bar{i}}(x+t)\bar{R}_{\bar{i}}(x+t)}{\bar{G}_{\bar{i}}(x)\bar{R}_{\bar{i}}(x)} dt .$$

6. В случае $d_i = 0,\ d_{\bar{i}} = \bar{1}$,

$$\theta_{id_1d_2x} = [\beta_i - \tau_i]^+ \wedge [\beta_{\bar{i}} - x]^+ \wedge [\tau_{\bar{i}} - x]^+,$$

$$M\theta_{id_1d_2x} = \int_0^\infty \frac{\bar{G}_{\bar{i}}(x+t)\bar{R}_{\bar{i}}(x+t)}{\bar{G}_{\bar{i}}(x)\bar{R}_{\bar{i}}(x)P(\beta_i > \tau_i)} dt \int_0^\infty r_i(z)\bar{G}_i(t+z)dz.$$

7. Пусть $d_i = \bar{1},\ d_{\bar{i}} = 0$, тогда

$$\theta_{id_1d_2x} = \tau_i \wedge \beta_i \wedge \left[[\beta_{\bar{i}} - \tau_{\bar{i}}]^+ - x\right]^+,$$

$$M\theta_{id_1d_2x} = \frac{\int_0^\infty \bar{G}_i(t)\bar{R}_i(t)dt \int_0^\infty r_{\bar{i}}(z)\bar{G}_{\bar{i}}(x+t+z)dz}{\int_0^\infty r_{\bar{i}}(z)\bar{G}_{\bar{i}}(x+z)dz} .$$

8. В случае $d_i = 1,\ d_{\bar{i}} = 0$

$$\theta_{id_1d_2x} = \alpha_i \wedge \left[[\beta_{\bar{i}} - \tau_{\bar{i}}]^+ - x\right]^+, \quad M\theta_{id_1d_2x} = \frac{\int_0^\infty \bar{F}_i(t)dt \int_0^\infty r_{\bar{i}}(z)\bar{G}_{\bar{i}}(x+t+z)dz}{\int_0^\infty r_{\bar{i}}(z)\bar{G}_{\bar{i}}(x+z)dz} .$$

9. Если $d_i = d_{\bar{i}} = 0$, то

$$\theta_{id_1d_2x} = [\beta_i - \tau_i]^+ \wedge \left[[\beta_{\bar{i}} - \tau_{\bar{i}}]^+ - x\right]^+,$$

$$M\theta_{id_1d_2x} = \frac{\int_0^\infty dt \int_0^\infty r_i(y)\bar{G}_i(t+y)dy \int_0^\infty r_{\bar{i}}(z)\bar{G}_{\bar{i}}(x+t+z)dz}{P(\beta_i > \tau_i)\int_0^\infty r_{\bar{i}}(z)\bar{G}_{\bar{i}}(x+z)dz},$$

где СВ $[\alpha - x]^+$, $[\beta - \tau]^+$, $\left[[\beta_{\bar{i}} - \tau_{\bar{i}}]^+ - x\right]^+$ имеют следующие законы распределения:

$$P\{[\alpha - x]^+ > t\} = \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(x)}, \qquad P\{[\alpha - x]^+ \in dt\} = \frac{f(x+t)}{\bar{F}(x)},$$

$$P\{[\beta - \tau]^+ > t\} = \frac{\int_0^\infty r(z)\bar{G}(t+z)dz}{P(\beta > \tau)}, \qquad P\{[\beta - \tau]^+ \in dt\} = \frac{\int_0^\infty r(z)g(t+z)dz}{P(\beta > \tau)},$$

$$P\{\left[[\beta - \tau]^+ - x\right]^+ > t\} = \frac{\int_0^\infty r(z)\bar{G}(t+x+z)dz}{\int_0^\infty r(z)\bar{G}(x+z)dz},$$

$$P\{\left[[\beta - \tau]^+ - x\right]^+ \in dt\} = \frac{\int_0^\infty r(z)g(t+x+z)dz}{\int_0^\infty r(z)\bar{G}(x+z)dz}$$

СВ $[\alpha - x]^+$ – остаточное время пребывания ПМП $\xi(t)$ в состоянии, при условии, что время пребывания в этом состоянии превысило величину *x*.

2.1.3. Нахождение стационарных характеристик надежности системы

Перейдем к нахождению стационарных характеристик надежности системы S: средней стационарной наработки системы на отказ T_+, среднего стационарного времени восстановления системы T_-, стационарного коэффициента готовности $K_Г$.

Для нахождения характеристик используем следующие формулы [16]:

$$T_+ = \frac{\int\limits_{E_+} m(e)\rho(de)}{\int\limits_{E_+} P(e,E_-)\rho(de)}, \qquad T_- = \frac{\int\limits_{E_-} m(e)\rho(de)}{\int\limits_{E_+} P(e,E_-)\rho(de)},$$

$$K_Г = \frac{\int\limits_{E_+} m(e)\rho(de)}{\int\limits_{E} m(e)\rho(de)} = \frac{T_+}{T_+ + T_-}, \tag{2.20}$$

где E_+ – множество работоспособных состояний, E_- – множество отказовых состояний, $\rho(de)$ – стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$, $P(e,E_-)$ – вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$ в подмножество отказовых состояний E_-, $m(e)$ – среднее время пребывания полумарковского процесса в состоянии $e \in E$.

Рассматривается параллельное соединение элементов системы. В этом случае:

$$E_+ = \{i\bar{d}x : \bar{d} = (d_1, d_2),\ \bar{d} \neq (0,0),\ x > 0\}, \quad E_- = \{100x,\ 200x\}.$$

Используя выражения для $m(e)$ и $\rho(de)$, найденные выше, и формулы (2.20), получаем

$$\int\limits_{E_-} m(e)\rho(de) = c\rho_1\rho_2 p_1 p_2 \int\limits_0^\infty dx \left[\frac{\int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^\infty r_1(y)\bar{G}_1(t+y)dy \int\limits_0^\infty r_2(z)\bar{G}_2(x+t+z)dz}{P(\beta_1 > \tau_1)P(\beta_2 > \tau_2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^\infty r_2(y)\bar{G}_2(t+y)dy \int\limits_0^\infty r_1(z)\bar{G}_1(x+t+z)dz}{P(\beta_1 > \tau_1)P(\beta_2 > \tau_2)} \right] =$$

$$= c\rho_1\rho_2 p_1 p_2 \left(\frac{\int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^\infty r_1(y)\bar{G}_1(t+y)dy}{P(\beta_1 > \tau_1)} \right) \left(\frac{\int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^\infty r_2(y)\bar{G}_2(t+y)dy}{P(\beta_2 > \tau_2)} \right) =$$

$$= c\rho_1\rho_2 p_1 p_2 M\left([\beta_1 - \tau_1]^+\right) M\left([\beta_2 - \tau_2]^+\right). \tag{2.21}$$

Перейдем к нахождению знаменателя выражений для T_+ и T_-:

$$\int_{E_+} P(e,E_-)\rho(de) = c\rho_1\rho_2\left[\int_0^\infty dx\int_0^\infty r_2(x+y)\bar{G}_2(x+y)dy\int_0^\infty \bar{G}_1(y+t)r_1(t)dt + \right.$$
$$+\int_0^\infty dx\int_0^\infty r_1(x+y)\bar{G}_1(x+y)dy\int_0^\infty \bar{G}_2(y+t)r_2(t)dt +$$
$$+\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{G}_2(y)r_2(y)dy\int_0^\infty \bar{G}_1(y+x+t)r_1(t)dt + \tag{2.22}$$
$$\left.+\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{G}_1(y)r_1(y)dy\int_0^\infty \bar{G}_2(y+x+t)r_2(t)dt\right]$$

Преобразуем первое слагаемое в скобках выражения (2.22):

$$\int_0^\infty dx\int_0^\infty r_2(x+y)\bar{G}_2(x+y)dy\int_0^\infty \bar{G}_1(y+t)r_1(t)dt =$$
$$=\int_0^\infty r_1(t)dt\int_0^\infty \bar{G}_1(y+t)dy\int_0^\infty r_2(x+y)\bar{G}_2(x+y)dx = \left[x+y=x'\right] = \tag{2.23}$$
$$=\int_0^\infty r_1(t)dt\int_0^\infty \bar{G}_1(y+t)dy\int_y^\infty r_2(x')\bar{G}_2(x')dx' = \int_0^\infty r_1(t)dt\int_0^\infty \bar{G}_1(x+t)dx\int_x^\infty \bar{G}_2(y)r_2(y)dy.$$

Преобразуем третье слагаемое в скобках выражения (2.22):

$$\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{G}_2(y)r_2(y)dy\int_0^\infty \bar{G}_1(y+x+t)r_1(t)dt =$$
$$=\int_0^\infty r_1(t)dt\int_0^\infty \bar{G}_2(y)r_2(y)dy\int_0^\infty \bar{G}_1(x+y+t)dx = \left[x+y=x'\right] = \tag{2.24}$$
$$=\int_0^\infty r_1(t)dt\int_0^\infty \bar{G}_2(y)r_2(y)dy\int_y^\infty \bar{G}_1(x'+t)dx' = \int_0^\infty r_1(t)dt\int_0^\infty \bar{G}_1(x+t)dx\int_0^x \bar{G}_2(y)r_2(y)dy.$$

Сложим (2.23) и (2.24):

$$\int_0^\infty r_1(t)dt\int_0^\infty \bar{G}_1(x+t)dx\int_x^\infty \bar{G}_2(y)r_2(y)dy+\int_0^\infty r_1(t)dt\int_0^\infty \bar{G}_1(x+t)dx\int_0^x \bar{G}_2(y)r_2(y)dy=$$

$$=\int_0^\infty r_1(t)dt\int_0^\infty \bar{G}_1(x+t)dx\int_0^\infty \bar{G}_2(y)r_2(y)dy=P\left(\beta_2>\tau_2\right)\int_0^\infty r_1(t)dt\int_0^\infty \bar{G}_1(x+t)dx=$$

$$=\left[x+t=x'\right]=P\left(\beta_2>\tau_2\right)\int_0^\infty r_1(t)dt\int_t^\infty \bar{G}_1(x')dx'=$$

$$=P\left(\beta_2>\tau_2\right)\int_0^\infty \bar{G}_1(x)dx\int_0^x r_1(t)dt=p_2\int_0^\infty \bar{G}_1(x)R_1(x)dx.$$

Аналогично, для суммы второго и четвертого слагаемых в скобках выражения (2.22) получаем

$$P\left(\beta_1>\tau_1\right)\int_0^\infty \bar{G}_2(x)dx\int_0^x r_2(t)dt=p_1\int_0^\infty \bar{G}_2(x)R_2(x)dx.$$

Следовательно,

$$\int_{E_+} P(e,E_-)\rho(de)=c\rho_1\rho_2\left[p_1\int_0^\infty \bar{G}_2(x)R_2(x)dx+p_2\int_0^\infty \bar{G}_1(x)R_1(x)dx\right]. \qquad (2.25)$$

Вычислим $\int_{E_+} m(e)\rho(de)$, используя (2.16) – (2.19) и средние времена пребывания в состояниях:

$$\int_{E_+} m(e)\rho(de)=c\rho_1\rho_2\left[\overset{\text{(I)}}{\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{F}_2(x+t)\bar{G}_1(t)\bar{R}_1(t)dt}+\overset{\text{(II)}}{\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{F}_1(x+t)\bar{G}_2(t)\bar{R}_2(t)dt}+\right.$$

$$+\overset{\text{(III)}}{\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{F}_2(x+t)\bar{F}_1(t)dt}+\overset{\text{(IV)}}{\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{G}_1(x+t)\bar{R}_1(x+t)\bar{G}_2(t)\bar{R}_2(t)dt}+$$

$$+\overset{\text{(V)}}{\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{F}_2(x+t)dt\int_0^\infty \bar{G}_1(t+z)r_1(z)dz}+\overset{\text{(VI)}}{\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{G}_2(x+t)\bar{R}_2(x+t)\bar{G}_1(t)\bar{R}_1(t)dt}+$$

$$+\overset{\text{(VII)}}{\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{F}_1(x+t)dt\int_0^\infty \bar{G}_2(t+z)r_2(z)dz}+\overset{\text{(VIII)}}{\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{G}_2(x+t)\bar{R}_2(x+t)\bar{F}_1(t)dt}+$$

$$
\begin{aligned}
&+\overset{(IX)}{\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{G}_2(x+t)\bar{R}_2(x+t)dt\int_0^\infty \bar{G}_1(t+z)r_1(z)dz}+\overset{(X)}{\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{G}_1(x+t)\bar{R}_1(x+t)\bar{F}_2(t)dt}+\\
&+\overset{(XI)}{\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{G}_1(x+t)\bar{R}_1(x+t)dt\int_0^\infty \bar{G}_2(t+z)r_2(z)dz}+\overset{(XII)}{\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{G}_2(t)\bar{R}_2(t)dt\int_0^\infty \bar{G}_1(x+t+z)r_1(z)dz}+\\
&+\overset{(XIII)}{\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{F}_1(x+t)\bar{F}_2(t)dt}+\overset{(XIV)}{\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{G}_1(t)\bar{R}_1(t)dt\int_0^\infty \bar{G}_2(x+t+z)r_2(z)dz}+\\
&+\overset{(XV)}{\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{F}_2(t)dt\int_0^\infty \bar{G}_1(x+t+z)r_1(z)dz}+\overset{(XVI)}{\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{F}_1(t)dt\int_0^\infty \bar{G}_2(x+t+z)r_2(z)dz}\Bigg]
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Рассмотрим сумму слагаемых (I) и (X) выражения (2.26):

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{F}_2(x+t)\bar{G}_1(t)\bar{R}_1(t)dt+\int_0^\infty dx\int_0^\infty \bar{G}_1(x+t)\bar{R}_1(x+t)\bar{F}_2(t)dt=\\
&=\left(\int_0^\infty \bar{G}_1(t)\bar{R}_1(t)dt\right)\left(\int_0^\infty \bar{F}_2(t)dt\right)=M\left(\beta_1\wedge\tau_1\right)M\alpha_2.
\end{aligned}
$$

Аналогично вычислим суммы слагаемых (III)+(XIII), (II)+(VIII), (IV)+(VI), (V)+(XV), (VII)+(XVI), (IX)+(XII) и (XI)+(XIV) выражения (2.26).

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\int_{E_+} m(e)\rho(de)=c\rho_1\rho_2\Big[M(\beta_1\wedge\tau_1)M\alpha_2+M\alpha_1M\alpha_2+M(\beta_2\wedge\tau_2)M\alpha_1+\\
&\quad+M(\beta_2\wedge\tau_2)M(\beta_1\wedge\tau_1)+p_1M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)M\alpha_2+p_2M\left([\beta_2-\tau_2]^+\right)M\alpha_1+\\
&\quad+p_1M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)M(\beta_2\wedge\tau_2)+p_2M\left([\beta_2-\tau_2]^+\right)M(\beta_1\wedge\tau_1)\Big]=\\
&=c\rho_1\rho_2\Big[p_1M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)\left(M\alpha_2+M(\beta_2\wedge\tau_2)\right)+\\
&+p_2M\left([\beta_2-\tau_2]^+\right)\left(M\alpha_1+M(\beta_1\wedge\tau_1)\right)+\left(M\alpha_1+M(\beta_1\wedge\tau_1)\right)\left(M\alpha_2+M(\beta_2\wedge\tau_2)\right)\Big].
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

В результате получаем следующие формулы:

$$T_+ = \frac{p_1 M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)\left(M\alpha_2 + M(\beta_2\wedge\tau_2)\right) + p_2 M\left([\beta_2-\tau_2]^+\right)\left(M\alpha_1 + M(\beta_1\wedge\tau_1)\right)}{p_1 p_2\left(M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)+M\left([\beta_2-\tau_2]^+\right)\right)} + \\ + \frac{\left(M\alpha_1 + M(\beta_1\wedge\tau_1)\right)\left(M\alpha_2 + M(\beta_2\wedge\tau_2)\right)}{p_1 p_2\left(M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)+M\left([\beta_2-\tau_2]^+\right)\right)}, \tag{2.28}$$

$$T_- = \frac{c\rho_1\rho_2 p_1 p_2 M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)M\left([\beta_2-\tau_2]^+\right)}{c\rho_1\rho_2\left[p_1\int_0^\infty \bar{G}_2(x)R_2(x)dx + p_2\int_0^\infty \bar{G}_1(x)R_1(x)dx\right]} = \\ = \frac{M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)M\left([\beta_2-\tau_2]^+\right)}{M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)+M\left([\beta_2-\tau_2]^+\right)}. \tag{2.29}$$

В преобразованиях использовалась следующая формула, доказанная в [22]:

$$\sum_{j=1}^{n}\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty \bar{F}_j(t)\left(\prod_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{n}\bar{F}_k(t+y_k)dy_k\right)dt = \prod_{j=1}^{n} M\alpha_j.$$

Используя формулы (2.20), (2.28), (2.29) можно найти стационарный коэффициент готовности $K_Г$.

Пример 2.1. В качестве примера использования формул (2.20), (2.28), (2.29), рассмотрим систему, у которой время безотказной работы элементов K_1 и K_2 равны $M\alpha_1$ = 8,33 ч., $M\alpha_2$ = 6,25 ч.; времена восстановления элементов K_1 и K_2 равны $M\beta_1$ = 0,71 ч., $M\beta_2$ = 0,83 ч., СВ α_1, α_2, β_1, β_2 имеют распределение Эрланга 5-го порядка. Каждый элемент имеет неслучайный резерв времени ($R_i(t) = 1(t-h_i)$), который изменяется от 0 до 0,7 часа с шагом 0,1 ч. В Таблице 2.1 представлены значения средней стационарной наработки на отказ $T_+(h_1,h_2)$, среднего стационарного времени восстановления $T_-(h_1,h_2)$ и стационарного коэффициента готовности $K_Г(h_1,h_2)$ рассматриваемой системы, при условии, что $h_1 + h_2 = 0,7$.

Таблица 2.1

Влияние резерва времени на характеристики надежности

h_1, ч.	h_2, ч.	$T_-(h_1,h_2)$, ч.	$T_+(h_1,h_2)$, ч.	$K_Г(h_1,h_2)$
0	0	0,385	49,551	0,99230
0	0,7	0,241	102,274	0,99765
0,1	0,6	0,241	91,035	0,99736
0,2	0,5	0,238	84,365	0,99719
0,3	0,4	0,233	82,291	0,99717
0,4	0,3	0,228	85,172	0,99733
0,5	0,2	0,224	93,617	0,99762
0,6	0,1	0,219	108,690	0,99799
0,7	0	0,214	132,300	0,99839

Данные Таблицы 2.1 показывают, что величина резерва времени оказывает существенное влияние на характеристики надежности системы.

2.2. Стационарное фазовое укрупнение двухкомпонентной системы

Для построения упрощенной модели функционирования рассматриваемой системы используем алгоритм стационарного фазового укрупнения, разработанный в работах [18, 16]. При использовании этого алгоритма целый класс состояний укрупняется в одно, что позволяет уменьшить размерность фазового пространства.

Укрупненные классы состояний введем следующим образом:

$$E_0 = \{100x;\, 200x\},\ E_1 = \{210x; 101x; 10\bar{1}x; 2\bar{1}0x; 20\bar{1}x; 1\bar{1}0x; 201x; 110x\},$$

$$E_2 = \{1\bar{1}1x; 111x; 211x; 21\bar{1}x; 2\bar{1}\bar{1}x; 1\bar{1}\bar{1}x; 11\bar{1}x; 2\bar{1}1x\}.$$

Состояние E_0 означает, что оба элемента находятся в отказе, E_1 – работоспособен только один из элементов системы, E_2 – оба элемента

работоспособны. Отметим, что укрупненные классы состояний можно вводить различными способами.

Определим вероятности перехода $\hat{p}_k^r$ ВЦМ $\left\{\hat{\xi}_n; n \geq 0\right\}$ и средние времена пребывания в состояниях $\hat{m}_k$ укрупненной системы по следующим формулам [20, 18]:

$$\hat{p}_k^r = \int\limits_{E_\kappa} \rho(de)P(e,E_r) \Big/ \rho(E_\kappa),\ k,r = \overline{1,N};$$

$$\hat{m}_k = M\hat{\theta}_k = \int\limits_{E_\kappa} \rho(de)m(e) \Big/ \rho(E_\kappa),\ k = \overline{1,N}. \qquad (2.30)$$

Найдем выражения знаменателей и числителей формул (2.30), используя (2.2) – (2.10) и (2.16) – (2.19):

$$\rho(E_0) = c\rho_1\rho_2\left[p_1\int\limits_0^\infty \bar{G}_2(x)R_2(x)dx + p_2\int\limits_0^\infty \bar{G}_1(x)R_1(x)dx\right],$$

$$\rho(E_2) = 2c\rho_1\rho_2\left[M\alpha_1 + M(\beta_1 \wedge \tau_1) + M\alpha_2 + M(\beta_2 \wedge \tau_2)\right],$$

$$\rho(E_1) = c\rho_1\rho_2 p_1\left(M\alpha_2 + M(\beta_2 \wedge \tau_2)\right) + c\rho_1\rho_2 p_2\left(M\alpha_1 + M(\beta_1 \wedge \tau_1)\right) +$$
$$+ 2c\rho_1\rho_2\left[\int\limits_0^\infty \bar{G}_2(x)R_2(x)dx + \int\limits_0^\infty \bar{G}_1(x)R_1(x)dx\right],$$

$$\int\limits_{E_1} \rho(de)P(e,E_0) = c\rho_1\rho_2\left[p_1\int\limits_0^\infty \bar{G}_2(x)R_2(x)dx + p_2\int\limits_0^\infty \bar{G}_1(x)R_1(x)dx\right],$$

$$\int\limits_{E_0} \rho(de)P(e,E_1) = c\rho_1\rho_2\left[p_1\int\limits_0^\infty \bar{G}_2(x)R_2(x)dx + p_2\int\limits_0^\infty \bar{G}_1(x)R_1(x)dx\right],$$

$$\int\limits_{E_1} \rho(de)P(e,E_2) = c\rho_1\rho_2\left[p_1\left(M\alpha_2 + M(\beta_2 \wedge \tau_2)\right) + p_2\left(M\alpha_1 + M(\beta_1 \wedge \tau_1)\right)\right],$$

$$\int\limits_{E_2} \rho(de)P(e,E_2) = c\rho_1\rho_2\left[(1-p_1)\left(M\alpha_2 + M(\beta_2 \wedge \tau_2)\right) + (1-p_2)\left(M\alpha_1 + M(\beta_1 \wedge \tau_1)\right) +\right.$$
$$\left. + M\alpha_1 + M(\beta_1 \wedge \tau_1) + M\alpha_2 + M(\beta_2 \wedge \tau_2)\right],$$

$$\int\limits_{E_1} \rho(de)P(e,E_1) = c\rho_1\rho_2\left[(2-p_1)\int\limits_0^\infty \bar{G}_2(x)R_2(x)dx + (2-p_2)\int\limits_0^\infty \bar{G}_1(x)R_1(x)dx\right],$$

$$\int_{E_2} \rho(de)P(e,E_1) = c\rho_1\rho_2\left[p_1\left(M\alpha_2 + M(\beta_2 \wedge \tau_2)\right) + p_2\left(M\alpha_1 + M(\beta_1 \wedge \tau_1)\right)\right],$$

$$\hat{p}_2^0 = \hat{p}_0^2 = 0.$$

Составим систему уравнений для стационарного распределения ВЦМ $\left\{\hat{\xi}_n; n \geq 0\right\}$ укрупненной системы:

$$\begin{cases} \hat{\rho}_1 = \hat{p}_0^1\hat{\rho}_0 + \hat{p}_1^1\hat{\rho}_1 + \hat{p}_2^1\hat{\rho}_2, \\ \hat{\rho}_0 = \hat{p}_1^0\hat{\rho}_1, \\ \hat{\rho}_2 = \hat{p}_1^2\hat{\rho}_1 + \hat{p}_2^2\hat{\rho}_2, \\ \hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_2 = 1. \end{cases} \tag{2.31}$$

Решение системы (2.31) имеет вид:

$$\hat{\rho}_0 = \frac{\hat{p}_1^0\hat{p}_2^1}{\hat{p}_2^1 + \hat{p}_1^2 + \hat{p}_1^0\hat{p}_2^1}, \quad \hat{\rho}_1 = \frac{\hat{p}_2^1}{\hat{p}_2^1 + \hat{p}_1^2 + \hat{p}_1^0\hat{p}_2^1}, \quad \hat{\rho}_2 = \frac{\hat{p}_1^2}{\hat{p}_2^1 + \hat{p}_1^2 + \hat{p}_1^0\hat{p}_2^1}. \tag{2.32}$$

Найдем средние времена пребывания в состояниях укрупненной системы, используя формулы (2.30).

Выражения для числителей этих формул имеют вид:

$$\int_{E_0} \rho(de)m(e) = c\rho_1\rho_2 p_1 p_2 M\left([\beta_1 - \tau_1]^+\right)M\left([\beta_2 - \tau_2]^+\right),$$

$$\int_{E_1} \rho(de)m(e) = c\rho_1\rho_2\Big[p_1 M\left([\beta_1 - \tau_1]^+\right)\left(M\alpha_2 + M(\beta_2 \wedge \tau_2)\right) +$$

$$+ p_2 M\left([\beta_2 - \tau_2]^+\right)\left(M\alpha_1 + M(\beta_1 \wedge \tau_1)\right)\Big],$$

$$\int_{E_2} \rho(de)m(e) = c\rho_1\rho_2\big[M\alpha_1 M\alpha_2 + M\alpha_1 M(\beta_2 \wedge \tau_2) +$$

$$+ M\alpha_2 M(\beta_1 \wedge \tau_1) + M(\beta_1 \wedge \tau_1)M(\beta_2 \wedge \tau_2)\big].$$

Используя формулы (2.30), получаем

$$\hat{m}_0 = \frac{p_1 p_2 M\left([\beta_1 - \tau_1]^+\right)M\left([\beta_2 - \tau_2]^+\right)}{p_1\int_0^\infty \bar{G}_2(x)R_2(x)dx + p_2\int_0^\infty \bar{G}_1(x)R_1(x)dx},$$

$$\hat{m}_1 = \frac{\left[p_1 M\left([\beta_1 - \tau_1]^+\right)\left(M\alpha_2 + M(\beta_2 \wedge \tau_2)\right) + p_2 M\left([\beta_2 - \tau_2]^+\right)\left(M\alpha_1 + M(\beta_1 \wedge \tau_1)\right)\right]}{p_1\left(M\alpha_2 + M(\beta_2 \wedge \tau_2)\right) + p_2\left(M\alpha_1 + M(\beta_1 \wedge \tau_1)\right) + 2\left[\int_0^\infty \bar{G}_2(x)R_2(x)dx + \int_0^\infty \bar{G}_1(x)R_1(x)dx\right]},$$

$$\hat{m}_2 = \frac{M\alpha_1 M\alpha_2 + M\alpha_1 M(\beta_2 \wedge \tau_2) + M\alpha_2 M(\beta_1 \wedge \tau_1) + M(\beta_1 \wedge \tau_1)M(\beta_2 \wedge \tau_2)}{2\left[M\alpha_1 + M(\beta_1 \wedge \tau_1) + M\alpha_2 + M(\beta_2 \wedge \tau_2)\right]}.$$

Следовательно, стационарные характеристики надежности укрупненной системы $\hat{S}$: средняя стационарная наработка системы на отказ $\hat{T}_+$, среднее стационарное время восстановления системы $\hat{T}_-$, стационарный коэффициент готовности $\hat{K}_\Gamma$ имеют вид:

$$\hat{T}_+ = \frac{\hat{m}_1\hat{\rho}_1 + \hat{m}_2\hat{\rho}_2}{\hat{\rho}_0}, \quad \hat{T}_- = \hat{m}_0, \quad \hat{K}_\Gamma = \frac{\hat{T}_+}{\hat{T}_+ + \hat{T}_-} = \frac{\hat{m}_1\hat{\rho}_1 + \hat{m}_2\hat{\rho}_2}{\hat{m}_1\hat{\rho}_1 + \hat{m}_2\hat{\rho}_2 + \hat{m}_0\hat{\rho}_0}. \quad (2.33)$$

Пример 2.2. В качестве примера использования формул (2.33), рассмотрим систему, описанную в Примере 2.1. Результаты расчетов представлены в Таблице 2.2. Расчеты результатов таблицы 2.2 представлены в **Приложении Г**.

Таблица 2.2

Характеристики надежности укрупненной системы

h_1, ч	h_2, ч	$\hat{T}_-(h_1,h_2)$, ч	$\hat{T}_+(h_1,h_2)$, ч	$\hat{K}_\Gamma(h_1,h_2)$
0	0	0,385	49,551	0,9923
0	0,7	0,241	102,274	0,99765
0,1	0,6	0,241	91,035	0,99736
0,2	0,5	0,238	84,365	0,99719
0,3	0,4	0,233	82,291	0,99717
0,4	0,3	0,228	85,172	0,99733
0,5	0,2	0,224	93,617	0,99762
0,6	0,1	0,219	108,690	0,99799
0,7	0	0,214	132,300	0,99839

Отметим, что результаты, полученные по укрупненной модели, совпадают с результатами для исходной модели.

2.3. Двухкомпонентная система. Приближенное нахождение стационарных характеристик

Рассматривается система S, состоящая из двух компонентов K_1 и K_2, причем компонент K_1 имеет мгновенно пополняемый резерв времени, равный h= *const*. Время безотказной работы компонентов K_1, K_2 – случайные величины (СВ) α_1, α_2 с функциями распределения (ФР) $F_1(t) = P(\alpha_1 \le t)$, $F_2(t) = P(\alpha_2 \le t)$, времена восстановления компонентов – СВ β_1, β_2 с ФР $G_1(t) = P(\beta_1 \le t)$, $G_2(t) = P(\beta_2 \le t)$. После восстановления первого компонента резерв времени пополняется до уровня h. СВ α_1, α_2, β_1, β_2 предполагаются независимыми, имеющими конечные математические ожидания, у функций $F_1(t)$, $F_2(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$ существуют плотности $f_1(t)$, $f_2(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$. Рассматривается случай параллельного соединения компонентов без их отключения. Отказ системы S наступает, если оба компонента восстанавливаются и полностью израсходован резерв времени.

2.3.1. Построение полумарковской модели

Для описания функционирования системы используем полумарковский процесс $\xi(t)$. Введем следующее множество E полумарковских состояний системы:

$$E = \{1, 210x, 1\overline{0}1x, 1\overline{0}0x, 211x, 111x, 2\overline{0}0xz, 101x_1x_2, 100x_1x_2, 2\overline{0}1xz, 200x, 110x, 201x\}.$$

Значение кодировки состояний следующее:

1 – оба компонента начинают работу, резерв времени полный;

$210x$ – компонент K_2 начал восстановление, K_1 работает, $x > 0$ время до конца работы первого, резерв не используется;

$1\bar{0}1x$ – компонент K_1 начал восстановление и продолжает функционировать за счет резерва времени, $x > 0$ время до конца работы K_2;

$1\bar{0}0x$ – K_1 начал восстановление и продолжает функционировать за счет резерва времени, K_2 восстанавливается, $x > 0$ время до конца восстановления K_2;

$211x$ – K_2 приступил к работе, $x > 0$ время до конца работы K_1, резерв не используется;

$111x$ – K_1 приступает к работе, резерв времени пополняется до уровня h и не используется, $x > 0$ время до конца работы K_2;

$110x$ – K_1 начал работу, резерв времени пополняется до уровня h и не используется, $x > 0$ время до начала работы K_2;

$201x$ – K_1 восстанавливается, резерв времени израсходован полностью, K_2 приступил к работе, $x > 0$ время до начала работы K_1;

$200x$ – K_1 восстанавливается, резерв времени израсходован полностью, K_2 начал восстанавливаться, $x > 0$ время до начала работы K_1, отказ системы;

$2\bar{0}0xz$ – K_1 восстанавливается и функционирует за счет резерва времени, K_2 начал восстанавливаться, $x > 0$ время до начала работы K_1, z – величина оставшегося резерва времени;

$101x_1x_2$ – K_1 восстанавливается, резерв времени исчерпан, x_1 – время до окончания восстановления K_1, x_2 – время до конца работы K_2;

$2\bar{0}1xz$ – K_1 восстанавливается и функционирует за счет резерва времени, K_2 приступает к работе, $x > 0$ время до начала работы K_1, z – величина оставшегося резерва времени;

$100x_1x_2$ – оба компонента восстанавливаются, резерв времени полностью исчерпан, x_1 – время до окончания восстановления K_1, x_2 – время до конца восстановления K_2, отказ системы.

Временная диаграмма функционирования рассматриваемой системы изображена на Рисунке 2.2.

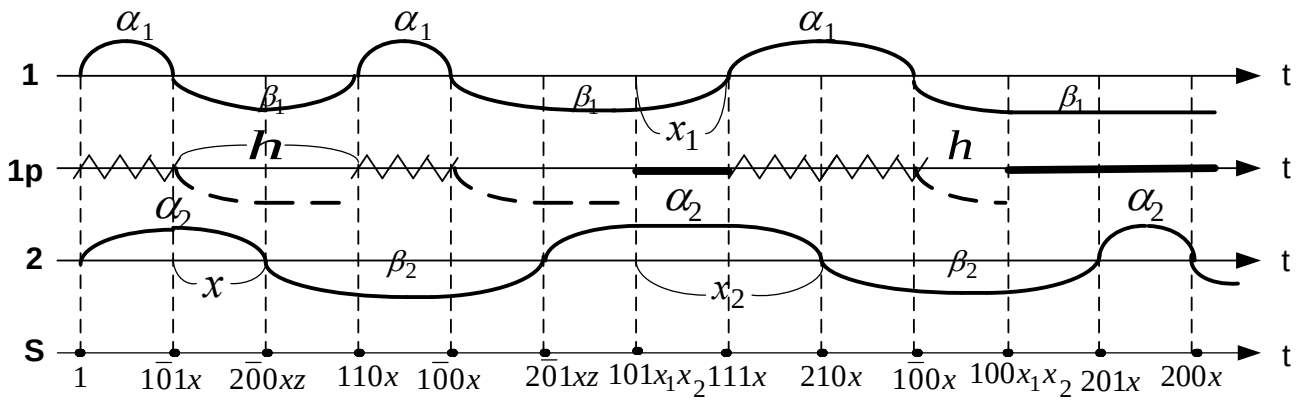


Рисунок 2.2 – Временная диаграмма функционирования исходной системы

2.3.2. Нахождение приближенных стационарных характеристик

Перейдем к нахождению приближенных значений стационарных характеристик надежности системы, для этого используем алгоритм асимптотического фазового укрупнения [20, 18, 102].

Предположим, что стохастическое ядро ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$ полумарковского процесса $\xi(t)$ исходной системы близко к стохастическому ядру ВЦМ $\{\xi_n^{(0)}; n \geq 0\}$ опорной системы S_0 с единственным стационарным распределением $\rho(dx)$. Тогда для приближенного нахождения средней стационарной наработки на отказ T_+, среднего стационарного времени восстановления T_- и стационарного коэффициента готовности $K_Г$ исходной системы S можно использовать следующие приближенные формулы [16]:

$$T_+ \approx \frac{(\rho, \bar{\mathrm{m}}_1)}{(\rho, P^{(\mathrm{r})}\bar{1}_0)}, \quad T_- \approx \frac{(\rho, P^{(\mathrm{r})}\bar{\mathrm{m}}_0)}{(\rho, P^{(\mathrm{r})}\bar{1}_0)}, \quad K_Г = \frac{T_+}{T_+ + T_-}, \tag{2.34}$$

где

$$\bar{\mathrm{m}}_1(x) = \begin{cases} m(x), & x \in E_+, \\ 0, & x \in E_-, \end{cases} \qquad \bar{\mathrm{m}}_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in E_+, \\ m(x), & x \in E_-, \end{cases}$$

$$\bar{1}_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in E_+, \\ 1, & x \in E_-, \end{cases} \qquad (\rho, f) = \int_X f(x)\rho(dx),$$

$\rho(dx)$ – стационарное распределение опорной ВЦМ $\{\xi_n^{(0)}; n \geq 0\}$; $m(x)$ – средние времена пребывания в состоянии $x \in E$ исходной системы; $P^{(r)}(x, B)$ – вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$ исходной системы, r – минимальное число шагов, за которое система может перейти в подмножество отказовых состояний E_- из работоспособных E_+, входящих в эргодический класс E^0.

Выберем опорную систему S_0. Предположим, что у исходной системы время безотказной работы элементов системы значительно больше времени восстановления. Тогда, опорной будет система S_0, у которой компоненты восстанавливаются мгновенно, то есть суперпозиция двух процессов восстановления.

Временная диаграмма функционирования опорной системы приведена на Рисунке 2.3.

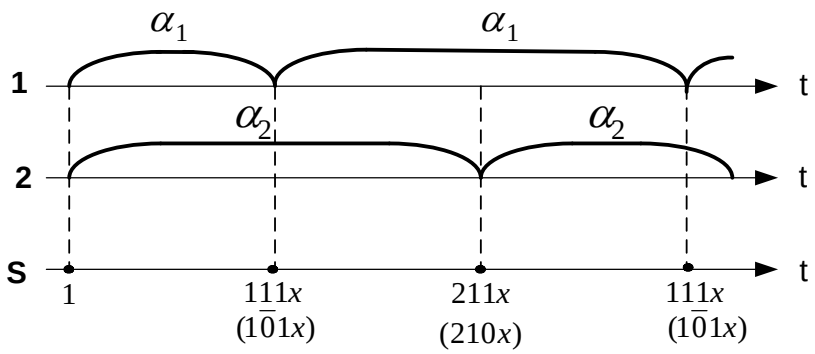


Рисунок 2.3 – Временная диаграмма функционирования опорной системы S_0

Определим вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n^0; n \geq 0\}$ опорной системы:

$$p_{111x}^{1\bar{0}1y} = f_1(x-y), \quad 0 < y < x, \quad p_{111x}^{210y} = f_1(x+y), \; y > 0, \; p_{1\bar{0}1x}^{111x} = 1,$$

$$p_{211x}^{1\bar{0}1y} = f_2(x+y), \; y > 0, \quad p_{211x}^{210y} = f_2(x-y), \; 0 < y < x, \quad p_{210x}^{211x} = 1.$$

Обозначим через $\rho(111x)$, $\rho(1\bar{0}1x)$, $\rho(211x)$, $\rho(210x)$ значения стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n^0; n \geq 0\}$ на состояниях $111x$, $1\bar{0}1x$, $211x$, $210x$. Составим для них систему интегральных уравнений [18]:

$$\begin{cases} \rho(111x) = \rho(1\bar{0}1x), \qquad \rho(211x) = \rho(210x), \\ \rho(1\bar{0}1x) = \int\limits_x^\infty \rho(111y)\, f_1(y-x)dy + \int\limits_0^\infty \rho(211y)\, f_2(y+x)dy, \\ \rho(211x) = \int\limits_x^\infty \rho(211y)\, f_2(y-x)dy + \int\limits_0^\infty \rho(111y)\, f_1(y+x)dy, \\ \int\limits_0^\infty \rho(111x)dx + \int\limits_0^\infty \rho(1\bar{0}1x)dx + \int\limits_0^\infty \rho(211x)dx + \int\limits_0^\infty \rho(210x)dx = 1 \end{cases} \tag{2.35}$$

Последнее уравнение системы – условие нормировки. Как показано в [18] система уравнений (2.35) имеет следующее решение:

$$\rho(111x) = \rho(1\bar{0}1x) = \rho_0 \bar{F}_2(x), \ \rho(211x) = \rho(210x) = \rho_0 \bar{F}_1(x), \tag{2.36}$$

где ρ_0 находится из условия нормировки.

Класс эргодических состояний опорной системы имеет вид:

$$E^0 = \{111x, 1\bar{0}1x, 211x, 210x\}.$$

Для исходной системы множество работоспособных E_+ и отказовых E_- состояний имеют вид:

$$E_+ = \left\{1, 210x, 1\bar{0}1x, 1\bar{0}0x, 211x, 111x, 2\bar{0}0xz, 101x_1x_2, 2\bar{0}1xz, 110x, 201x\right\},$$

$$E_- = \left\{100x_1x_2, 200x\right\}.$$

Определим вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$ исходной системы, которые используются в применяемом методе:

$$P_{210x}^{1\bar{0}0y} = g_2(x+y), y > 0; \ P_{111x}^{210y} = f_1(x+y), y > 0;$$

$$P_{1\bar{0}1x}^{2\bar{0}0yh-x} = g_1(x+y), y > 0, 0 < x < h; P_{110x}^{1\bar{0}0y} = f_1(x-y), 0 < y < x;$$

$$P_{1\bar{0}1x}^{101yx-h} = g_1(y+h), y > 0, x > h; P_{1\bar{0}0x}^{110y} = g_1(x-y), 0 < y < x, x > h;$$

$$P_{1\bar{0}1x}^{110y} = g_1(x-y), 0<y<x, 0<x<h; \quad P_{1\bar{0}0x}^{100yx-h} = g_1(y+h), y>0, x>h;$$

$$P_{111x}^{1\bar{0}1y} = f_1(x-y), 0<y<x; \qquad P_{211x}^{210y} = f_2(x-y), 0<y<x;$$

$$P_{201x}^{200y} = f_2(x-y), 0<y<x. \tag{2.37}$$

Найдем средние значения времен пребывания в состояниях исходной системы, которые определяются формулами:

$$M\theta_{210x} = \int_0^x \bar{G}_2(t)dt, \; M\theta_{1\bar{0}1x} = \int_0^{x\wedge h} \bar{G}_1(t)dt, \; M\theta_{1\bar{0}0x} = \int_0^{x\wedge h} \bar{G}_1(t)dt,$$

$$M\theta_{211x} = \int_0^x \bar{F}_2(t)dt, \; M\theta_{2\bar{0}0xz} = \int_0^{x\wedge z} \bar{G}_2(t)dt, \; M\theta_{2\bar{0}1xz} = \int_0^{x\wedge z} \bar{F}_2(t)dt,$$

$$M\theta_{101x_1x_2} = M\theta_{100x_1x_2} = x_1 \wedge x_2, \; M\theta_{200x} = \int_0^x \bar{G}_2(t)dt. \tag{2.38}$$

Для рассматриваемой системы $r = 2$, так как исходная система может за 2 шага перейти в подмножество отказовых состояний E_- из работоспособных, входящих в эргодический класс E^0.

Стационарные характеристики системы T_+, T_-, K_Γ найдем, используя формулы (2.34), (2.36 – 2.38).

Сперва вычислим

$$(\rho, \bar{m}_1) = \int_{E_+} m(x)\rho(dx) = \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_2(x)dx \int_0^x \bar{F}_1(t)dt + \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_2(x)dx \int_0^{x\wedge h} \bar{G}_1(t)dt +$$
$$+\rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx \int_0^x \bar{F}_2(t)dt + \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx \int_0^x \bar{G}_2(t)dt, \tag{2.39}$$

Сложив первое и третье слагаемое (2.39), получим:

$$\rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_2(x)dx \int_0^x \bar{F}_1(t)dt + \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx \int_0^x \bar{F}_2(t)dt =$$
$$= \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_2(x)dx \int_0^x \bar{F}_1(t)dt + \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_2(x)dx \int_x^\infty \bar{F}_1(t)dt = \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_2(x)dx \int_0^\infty \bar{F}_1(t)dt =$$
$$= \rho_0 M\alpha_1 M\alpha_2.$$

Распишем второе слагаемое формулы (2.39):

$$\rho_0\int_0^\infty \bar{F}_2(x)dx\int_0^{x\wedge h}\bar{G}_1(t)dt=\underbrace{\rho_0\int_0^h \bar{F}_2(x)dx\int_0^x \bar{G}_1(t)dt}_{\text{если } x<h}+\underbrace{\rho_0\int_h^\infty \bar{F}_2(x)dx\int_0^h \bar{G}_1(t)dt}_{\text{если } x>h}$$

В итоге получим:

$$(\rho,\bar{m}_1)=\int_{E_+} m(x)\rho(dx)\ =\ \rho_0 M\alpha_1 M\alpha_2+\ \rho_0\int_0^h \bar{F}_2(x)dx\int_0^x \bar{G}_1(t)dt+$$

$$+\rho_0\int_0^h \bar{G}_1(t)dt\int_h^\infty \bar{F}_2(x)dx+\rho_0\int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx\int_0^x \bar{G}_2(t)dt\,. \qquad (2.40)$$

Найдем $(\rho,P^{(2)}\bar{1}_0)=\int_{E^0}\rho(dx)\int_{E^1}P(x,dy_1)P(y_1,E_-)$, где E^1 – множество предотказовых состояний. В отказ можно попасть:

1. по цепочке $210x\to 1\underset{y_1\ge h}{\bar{0}0}y_1\to E_-$.

То есть: $\rho_0\int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx\int_0^\infty g_2(x+y_1)\bar{G}_1(h)dy_1=\rho_0\bar{G}_1(h)\int_0^\infty \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x+h)dx\,.$ (2.41)

2. по цепочке $1\underset{x<h}{\bar{0}1}x\to 20\underset{y>h-x}{\bar{0}}y(h-x)\to E_-$:

$$\rho_0\int_0^h \bar{F}_2(x)dx\int_{h-x}^\infty g_1(x+y)\bar{G}_2(h-x)dy=\rho_0\int_0^h \bar{F}_2(x)\bar{G}_2(h-x)dx\int_{h-x}^\infty g_1(x+y)dy=$$
$$=\rho_0\bar{G}_1(h)\int_0^h \bar{F}_2(x)\bar{G}_2(h-x)dx. \qquad (2.42)$$

В итоге, сложив (2.41) и (2.42), получим:

$$(\rho,P^{(2)}\bar{1}_0)=\rho_0\bar{G}_1(h)\left[\int_0^h \bar{F}_2(x)\bar{G}_2(h-x)dx+\int_0^\infty \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x+h)dx\right]. \qquad (2.43)$$

Найдем $(\rho,P^{(2)}\bar{m}_0)=\int_{E^0}\rho(dx)\int_E P(x,dy_1)\int_{E_-}P(y_1,dy_2)\bar{m}_0(y_2)$.

$$(\rho,P^{(2)}\bar{m}_0)=\rho_0\int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx\int_h^\infty g_2(x+y_1)dy_1\int_0^\infty g_1(h+y_2)\left[(y_1-h)\wedge y_2\right]dy_2+$$
$$+\rho_0\int_0^h \bar{F}_2(x)dx\int_{h-x}^\infty g_1(x+y_1)dy_1\int_0^\infty g_2(h-x+y_2)\left[(y_1+x-h)\wedge y_2\right]dy_2. \qquad (2.44)$$

Для первого слагаемого (2.44) сделаем замену переменной $\begin{bmatrix} y_1 - h = y_1' \\ y_1 = y_1 + h \end{bmatrix}$, а для второго – $\begin{bmatrix} y_1 + x - h = y_1' \\ y_1 = y_1 + h - x \end{bmatrix}$.

Получим

$$(\rho, P^{(2)}\bar{m}_0) = \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx \int_h^\infty g_2(x + y_1' + h)dy_1' \int_0^\infty g_1(h + y_2)\left[y_1' \wedge y_2\right]dy_2 +$$

$$+\rho_0 \int_0^h \bar{F}_2(x)dx \int_0^\infty g_1(y_1' + h)dy_1' \int_0^\infty g_2(h - x + y_2)\left[y_1' \wedge y_2\right]dy_2 =$$

$$= \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx \int_h^\infty g_2(x + y_1 + h)dy_1 \left[\underbrace{\int_0^{y_1} g_1(h + y_2)y_2 dy_2}_{\text{при } y_2 < y_1} + \underbrace{\int_{y_1}^\infty g_1(h + y_2)y_1 dy_2}_{\text{при } y_2 > y_1} \right] +$$

$$+\rho_0 \int_0^h \bar{F}_2(x)dx \int_0^\infty g_1(y_1 + h)dy_1 \left[\underbrace{\int_0^{y_1} g_2(h - x + y_2)y_2 dy_2}_{\text{при } y_2 < y_1} + \underbrace{\int_{y_1}^\infty g_2(h - x + y_2)y_1 dy_2}_{\text{при } y_2 > y_1} \right] =$$

$$= \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx \int_h^\infty g_2(x + y_1 + h)dy_1 \int_0^{y_1} g_1(h + y_2)y_2 dy_2 +$$

$$+ \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx \int_h^\infty g_2(x + y_1 + h)dy_1 \int_{y_1}^\infty g_1(h + y_2)y_1 dy_2 +$$

$$+ \rho_0 \int_0^h \bar{F}_2(x)dx \int_0^\infty g_1(y_1 + h)dy_1 \int_0^{y_1} g_2(h - x + y_2)y_2 dy_2 +$$

$$+ \rho_0 \int_0^h \bar{F}_2(x)dx \int_0^\infty g_1(y_1 + h)dy_1 \int_{y_1}^\infty g_2(h - x + y_2)y_1 dy_2 =$$

$$= \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx \int_0^\infty g_1(y_2+h)y_2 dy_2 \int_{y_2}^\infty g_2(x+y_1+h)\,dy_1 \overset{[x+y_1+h=y_1']}{+}$$

$$+ \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx \int_h^\infty g_2(x+y_1+h)y_1 dy_1 \int_{y_1}^\infty g_1(y_2+h)dy_2 \overset{[y_2+h=y_2']}{+}$$

$$+ \rho_0 \int_0^h \bar{F}_2(x)dx \int_0^\infty g_2(h-x+y_2)y_2 dy_2 \int_{y_2}^\infty g_1(y_1+h)\,dy_1 \overset{[y_1+h=y_1']}{+}$$

$$+ \rho_0 \int_0^h \bar{F}_2(x)dx \int_0^\infty g_1(y_1+h)y_1 dy_1 \int_{y_1}^\infty g_2(h-x+y_2)dy_2 \overset{[h-x+y_2=y_2']}{=}$$

$$= \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx \int_0^\infty y_2 g_1(y_2+h)\bar{G}_2(x+y_2+h)dy_2 +$$

$$+ \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx \int_h^\infty y_1 g_2(x+y_1+h)\bar{G}_1(y_1+h)dy_1 +$$

$$+ \rho_0 \int_0^h \bar{F}_2(x)dx \int_0^\infty y_2 g_2(h-x+y_2)\bar{G}_1(y_2+h)dy_2 +$$

$$+ \rho_0 \int_0^h \bar{F}_2(x)dx \int_0^\infty y_1 g_1(y_1+h)\bar{G}_2(h-x+y_1)dy_1 =$$

$$= -\rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx \int_0^\infty y d_y\left[\bar{G}_1(y+h)\bar{G}_2(x+y+h)\right] -$$

$$- \rho_0 \int_0^h \bar{F}_2(x)dx \int_0^\infty y d_y\left[\bar{G}_1(y+h)\bar{G}_2(h-x+y)\right] =$$

$$\begin{bmatrix} u = y, & du = dy \\ dv = d_y\left[\bar{G}_1(y+h)\bar{G}_2(x+y+h)\right], & v = \bar{G}_1(y+h)\bar{G}_2(x+y+h) \end{bmatrix}$$

$$= -\rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx \left[y\bar{G}_1(y+h)\bar{G}_2(x+y+h)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \bar{G}_1(y+h)\bar{G}_2(x+y+h)dy \right] -$$

$$- \rho_0 \int_0^h \bar{F}_2(x)dx \left[y\bar{G}_1(y+h)\bar{G}_2(h-x+y)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \bar{G}_1(y+h)\bar{G}_2(h-x+y)dy \right] =$$

$$= \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx \int_0^\infty \bar{G}_1(y+h)\bar{G}_2(x+y+h)dy +$$

$$+ \rho_0 \int_0^h \bar{F}_2(x)dx \int_0^\infty \bar{G}_1(y+h)\bar{G}_2(h-x+y)dy =$$

$$= \rho_0 \int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx \int_h^\infty \bar{G}_1(y)\bar{G}_2(x+y)dy + \rho_0 \int_0^h \bar{F}_2(x)dx \int_h^\infty \bar{G}_1(y)\bar{G}_2(y-x)dy =$$

$$= \rho_0 \int_h^\infty \bar{G}_1(y)dy \int_0^\infty \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x+y)dx + \rho_0 \int_h^\infty \bar{G}_1(y)dy \int_0^h \bar{F}_2(x)\bar{G}_2(y-x)dx.$$

Тогда выражение (2.44) примет вид:

$$(\rho, P^{(2)}\bar{m}_0) = \int_{E^0} \rho(dx) \int_E P(x, dy_1) \int_{E_-} P(y_1, dy_2)\bar{m}_0(y_2) =$$

$$= \rho_0 \int_h^\infty \bar{G}_1(y)dy \int_0^\infty \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x+y)dx + \rho_0 \int_h^\infty \bar{G}_1(y)dy \int_0^h \bar{F}_2(x)\bar{G}_2(y-x)dx. \quad (2.45)$$

Следовательно, средняя стационарная наработка системы на отказ T_+, среднее стационарное время восстановления системы T_- имеют вид:

$$T_+ \approx \frac{(\rho, \bar{m}_1)}{(\rho, P^{(2)}\bar{1}_0)} =$$

$$= \frac{M\alpha_1 M\alpha_2 + \int_0^h \bar{F}_2(x)dx \int_0^x \bar{G}_1(t)dt + \int_0^h \bar{G}_1(t)dt \int_h^\infty \bar{F}_2(x)dx + \int_0^\infty \bar{F}_1(x)dx \int_0^x \bar{G}_2(t)dt}{\bar{G}_1(h)\left(\int_0^h \bar{F}_2(x)\bar{G}_2(h-x)dx + \int_0^\infty \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x+h)dx\right)}. \quad (2.46)$$

$$T_- \approx \frac{(\rho, P^{(\mathrm{r})}\bar{m}_0)}{(\rho, P^{(\mathrm{r})}\bar{1}_0)} = \frac{\int_h^\infty \bar{G}_1(y)dy \int_0^\infty \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x+y)dx + \int_h^\infty \bar{G}_1(y)dy \int_0^h \bar{F}_2(x)\bar{G}_2(y-x)dx}{\bar{G}_1(h)\left(\int_0^h \bar{F}_2(x)\bar{G}_2(h-x)dx + \int_0^\infty \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x+h)dx\right)}. \quad (2.47)$$

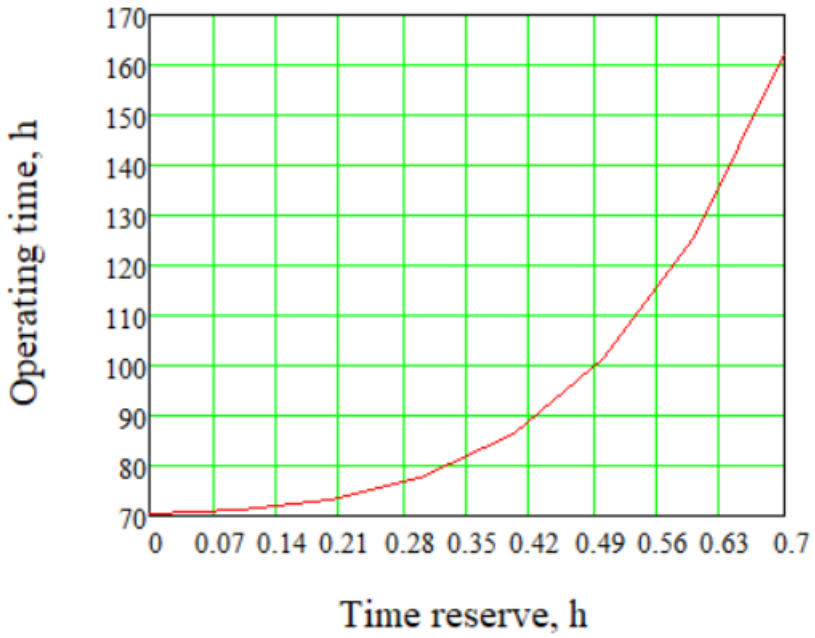
Пример 2.3. В качестве примера использования формул (2.34), (2.46), (2.47), рассмотрим систему, у которой время безотказной работы компонентов K_1 и K_2 равны $M\alpha_1$ = 8,33 ч., $M\alpha_2$ = 6,25 ч.; времена восстановления компонентов K_1 и K_2 равны $M\beta_1$ = 0,71 ч., $M\beta_2$ = 0,83 ч., СВ α_1, α_2, β_1, β_2 имеют распределение Эрланга 5-го порядка. Резерв времени h изменяется от 0 до 0,7 часа с шагом 0,1 ч. Найдены соответствующие значения средней стационарной наработки на отказ T_+, среднего стационарного времени восстановления T_- и стационарного коэффициента готовности $K_Г$ рассматриваемой системы. Результаты

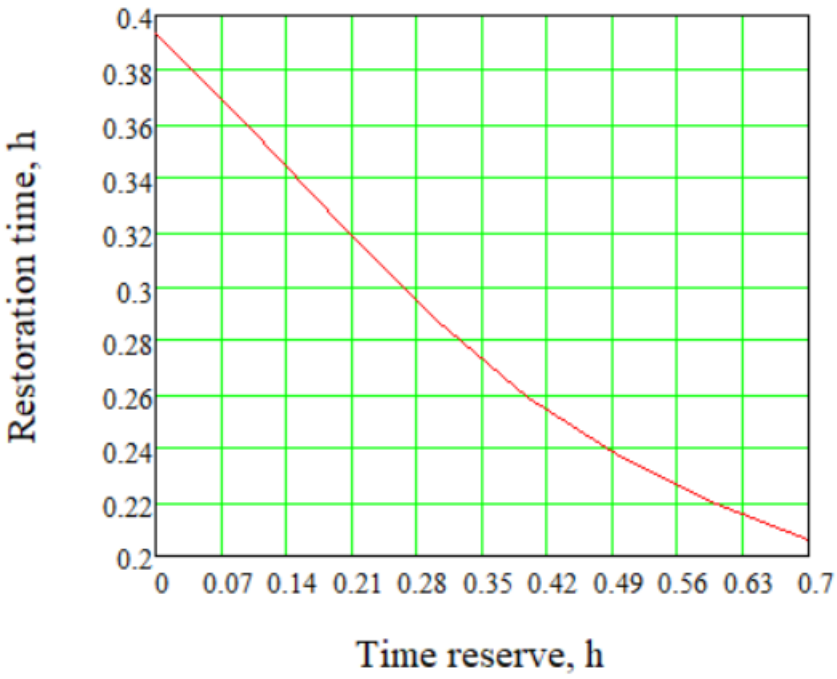
представлены в Таблице 2.3 (расчеты показаны в **Приложении Д**) и на Рисунке 2.4.

Таблица 2.3

Значения стационарных характеристик системы при различном резерве времени

h	T_+	T_-	$K_Г$
0	70,347	0,393	0,99444
0,1	71,143	0,359	0,99498
0,2	72,851	0,322	0,99561
0,3	77,308	0,287	0,9963
0,4	86,281	0,259	0,99701
0,5	101,574	0,236	0,99768
0,6	125,693	0,219	0,99826
0,7	162,566	0,206	0,99873





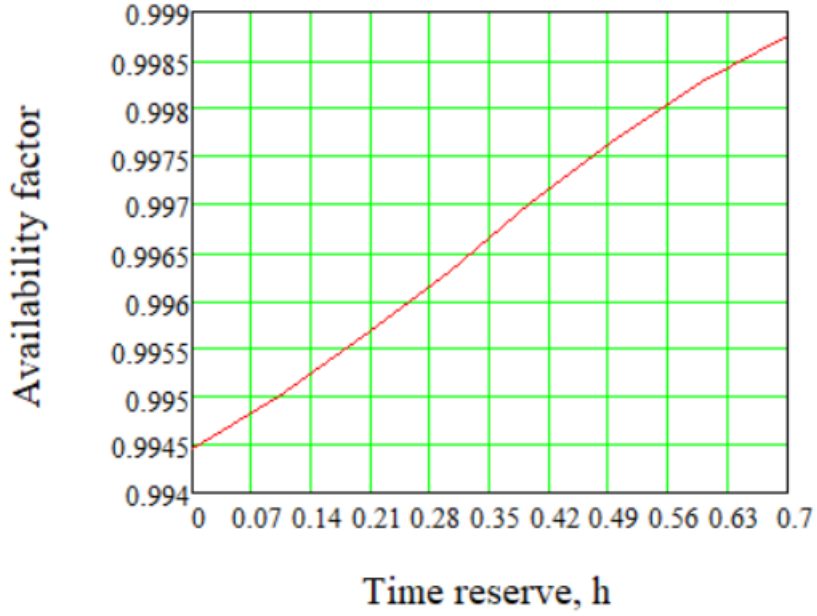


Рисунок 2.4 – Зависимость стационарных характеристик надежности системы от величины резерва времени.

Данная система соответствует системе, рассмотренной в разделе 2.1, когда резерв времени у второго компонента отсутствует. В Таблице 2.4 приведено сравнение результатов расчетов коэффициента готовности для системы из примера 2.1 (резерв времени второго элемента отсутствует, т.е. $h2$=0) и примера

2.3. Резерв времени h изменяется от 0 до 0,7 часа с шагом 0,1 ч. Точное значение вычисляется по формулам (2.20), при h_2=0, а приближенное – по (2.34).

Таблица 2.4

Сравнение коэффициентов готовности

h	Точные формулы	Приближенные формулы	Погрешность
0	0,99230	0,99444	0,00214
0,1	0,99324	0,99498	0,00174
0,2	0,99421	0,99561	0,0014
0,3	0,99520	0,99630	0,0011
0,4	0,99615	0,99701	0,00086
0,5	0,99702	0,99768	0,00066
0,6	0,99777	0,99826	0,00049
0,7	0,99839	0,99873	0,00034

Таким образом, погрешность расчетов при использовании приближенных формул (2.34) составляет менее 1%.

Выводы по Главе 2

1. Решены задачи математического описания функционирования двухкомпонентных систем с поэлементным резервом времени. Их существенной особенностью является то, что случайные величины, определяющие характеристики надежности системы, имеют функции распределения общего вида.

2. Получены аналитические выражения для средней стационарной наработки системы на отказ, среднего стационарного времени восстановления системы, стационарного коэффициента готовности двухкомпонентной системы с поэлементным РВ.

3. С применением АФУ вычислены значения стационарных характеристик надежности двухкомпонентной системы с поэлементным РВ. Следует отметить, что результаты совпали со значениями для аналитических выражений, что позволяет применять АФУ для исследования многокомпонентных систем

4. Используя приближенный метод [16], найдены стационарные надежности двухкомпонентной системы, у которой резерв времени есть только у одного компонента. Очевидно, что такая система совпадает с двухкомпонентной системой с поэлементным резервом времени в случае, когда РВ у одного компонента равен 0. Сравнение результатов для приближенных и аналитических выражений имеет погрешность менее 1%, что позволяет применять приближенные методы для исследования многокомпонентных систем.

5. Полученные аналитические выражения стационарных характеристик надежности рассматриваемых систем обладают универсальностью и могут быть использованы для решения оптимизационных задач, связанных с распределением величин резерва времени и инженерных расчетов.

Глава 3. Многокомпонентная система с поэлементным мгновенно пополняемым резервом времени

В данной главе на основе теории полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний [20, 18, 16, 113] рассматривается полумарковская модель многокомпонентной системы с поэлементным мгновенно пополняемым резервом времени. Найдены стационарные характеристики надёжности системы, проведен анализ влияния величины резерва времени на полученные характеристики.

В параграфе 3.1 построена полумарковская модель многокомпонентной системы с поэлементным мгновенно пополняемым РВ.

Стационарные характеристики надежности и эффективности, рассматриваемой модели, найдены в параграфе 3.2.

В параграфе 3.3. найдены аналитические выражения для стационарных характеристик надежности в случаях параллельного и последовательного соединения элементов системы.

В параграфе 3.4. для задачи, рассмотренной в монографии [52], проведен анализ надежности и эффективности однониточного нефтепровода с резервуарными парками, используя результаты, полученные в параграфе 3.3.

3.1. Построение полумарковской модели. Нахождение стационарного распределения

Рассмотрим систему S, состоящую из N компонентов, времена безотказной работы которых случайные величины (СВ) α_k с функциями распределения (ФР) $F_k(t)$, а времена восстановления – СВ β_k с ФР $G_k(t)$, $k=\overline{1,N}$. Каждый компонент системы имеет случайный, мгновенно пополняемый резерв времени [61, 21, 15] τ_k с ФР $R_k(t)$. Резерв времени начинает использоваться в момент начала восстановления компонента. Отказ компонента наступает тогда, когда

компонент восстанавливается и полностью израсходован резерв времени ($\beta_k > \tau_k$) и продолжается до момента восстановления компонента. СВ α_k, β_k, τ_k предполагаются независимыми в совокупности, имеющими конечные математические ожидания; ФР $F_k(t)$, $G_k(t)$, $R_k(t)$ – имеющими плотности $f_k(t)$, $g_k(t)$, $r_k(t)$. Отказ системы S определяется исходя из анализа структуры системы. Восстановление компонентов системы предполагается неограниченным.

3.1.1. Построение полумарковской модели системы

Для описания функционирования системы S используем полумарковский процесс (ПМП) [20, 101] $\xi(t)$. Введем дискретно-непрерывное фазовое пространство состояний вида:

$$E = \{i\bar{d}\bar{x} : \bar{d} = (d_1, d_2, ..., d_k, ..., d_N),\ \bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_N), x_k \geq 0,\ k = \overline{1, N}\}, \quad (3.1)$$

где $i = \overline{1, N}$ указывает номер компонента, в котором произошло изменение физического состояния. Компонента d_k вектора $\bar{d}$ описывает физическое состояние компонента с номером k:

$$d_k = \begin{cases} 1, \text{ если к– ый элемент работоспособен;} \\ \bar{1}, \text{ если к– ый элемент восстанавливается и} \\ \quad \text{функционирует за счет резерва времени;} \\ 0, \text{ если к– ый элемент находится в отказе.} \end{cases}$$

Непрерывная компонента x_k вектора $\bar{x}$ указывает время, прошедшее с последнего изменения физического состояния в компоненте с номером k; отметим, что $x_i = 0$.

Найдем времена пребывания в состояниях системы. Для этого введём следующие СВ:

$$\delta_z^{(k)} = \begin{cases} \alpha_k, \ \textit{если } z = 1, \\ \beta_k \wedge \tau_k, \ \textit{если } z = \overline{1} \\ \left[\beta_k - \tau_k\right]^+, \textit{если } z = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

где $\wedge$ – знак минимума, $\left[\beta_k - \tau_k\right]^+$ – СВ, ФР которой определяется равенством

$$P\left(\left[\beta_k - \tau_k\right]^+ \le t\right) = 1 - \frac{\int_0^\infty \bar{G}_k(y+t) r_k(y) dy}{P\left(\beta_k > \tau_k\right)}.$$

Обозначим $V_z^{(k)}(t) = P\left(\delta_z^{(k)} < t\right)$ – ФР СВ $\delta_z^{(k)}$, $\bar{V}_z^{(k)}(t) = 1 - V_z^{(k)}(t)$, $v_z^{(k)}(t)$ – плотности распределения вероятностей СВ $\delta_z^{(k)}$:

$$v_1^{(k)}(t) = f_k(t), \quad v_{\bar{1}}^{(k)}(t) = \bar{R}_k(t) g_k(t) + \bar{G}_k(t) r_k(t), \quad v_0^{(k)}(t) = \frac{\int_0^\infty g_k(x+t) r_k(x) dx}{P(\beta_k > \tau_k)}.$$

Тогда время пребывания в состоянии $i\bar{d}\bar{x}$ определяется равенством:

$$\theta_{i\bar{d}\bar{x}} = \bigwedge_{k=1}^{N} \left[\delta_{d_k}^{(k)} - x_k\right]^+, \ x_i = 0. \tag{3.3}$$

Определим вероятности переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n; \mathrm{n} \ge 0\}$.

Введем дополнительные функции:

$$w_{1,z}^{(k)}(t) = \begin{cases} v_1^{(k)}(t), & \text{если } \mathrm{z} = 1, \\ 0, & \text{если } \mathrm{z}=0, \overline{1}, \end{cases}$$

$$w_{\bar{1},z}^{(k)}(t) = \begin{cases} \bar{R}_k(t) g_k(t), & \text{если } \mathrm{z} = 1, \\ \bar{G}_k(t) r_k(t), & \text{если } \mathrm{z} = 0, \\ 0, & \text{если } \mathrm{z}=\overline{1}, \end{cases} \quad w_{0,z}^{(k)}(t) = \begin{cases} v_0^{(k)}(t), & \text{если } z = 1, \\ 0, & \text{если } z = 0, \overline{1}. \end{cases}$$

Отметим, что функции

$$f_{\bar{1},1}^{(k)}(t) = \frac{w_{\bar{1},1}^{(k)}(t)}{P(\tau_k > \beta_k)}, \quad f_{\bar{1},0}^{(k)}(t) = \frac{w_{\bar{1},0}^{(k)}(t)}{P(\tau_k < \beta_k)}, \quad k = \overline{1, N}$$

являются плотностями распределений.

Плотности вероятностей переходов ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$ имеют следующий вид:

$$p_{i\bar{d}\bar{x}}^{j\bar{d}'\bar{y}} = \begin{cases} \dfrac{w_{d_j,d'_j}^{(j)}(x_j + y_i)\prod\limits_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{N} \bar{V}_{d_k}^{(k)}(x_k + y_i)}{\prod\limits_{\substack{s=1,\\ s\neq i}}^{N} \bar{V}_{d_s}^{(s)}(x_s)}, & j \neq i, y_k = x_k + y_i, k \neq j, y_j = 0, \\ \dfrac{w_{d_i,d'_i}^{(i)}(y_k - x_k)\prod\limits_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{N} \bar{V}_{d_k}^{(k)}(y_k)}{\prod\limits_{\substack{s=1,\\ s\neq i}}^{N} \bar{V}_{d_s}^{(s)}(x_s)}, & j = i, y_k = x_k + t, k \neq i, y_i = x_i = 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

вектора $\bar{d}$ и $\bar{d}'$ отличаются только j-ой компонентой.

3.1.2. Нахождение стационарного распределения вложенной цепи Маркова

Для нахождения стационарных характеристик надежности и эффективности системы S найдем стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$.

Введем обозначения: пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_N)$, тогда векторы $(\bar{x} - t)^{(i)}$, $\left[(\bar{x} - x_j)^{(i)}, t\right]$, где $x_j = \bigwedge\limits_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{N} x_k$, определяется следующим образом:

$$(\bar{x} - t)_k^{(i)} = \begin{cases} x_k - t, & k \neq i, \\ 0, & k = i, \end{cases} \qquad \left[(\bar{x} - x_j)^{(i)}, t\right]_k = \begin{cases} x_k - x_j, & k \neq i, \\ t, & k = i. \end{cases}$$

Предположим, что у стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$ существуют плотности $\rho(i\bar{d}\bar{x})$, используя (3.3), (3.4), составим систему интегральных уравнений, которой они удовлетворяют.

1. В случае состояний $i\bar{d}\bar{x}$, $\bar{d}_i = \bar{1}$ возможны переходы:

a) $i\bar{d}^{(i)}(\bar{x}-t)^{(i)} \to i\bar{d}\bar{x},\ 0<t<x_j,\ \bar{d}_i^{(i)}=1,$

b) $j\bar{d}^{(i)}\left[(\bar{x}-x_j)^{(i)},t\right] \to i\bar{d}\bar{x},\ \ t\geq 0,\ \bar{d}_i^{(i)}=1.$

Тогда

$$\rho\left(i\bar{d}\bar{x}\right)=\int_0^{x_j}\frac{v_1^{(i)}(t)\prod\limits_{\substack{k=1,\\k\neq i}}^{N}\bar{V}_{d_k}^{(k)}(x_k)}{\prod\limits_{\substack{s=1,\\s\neq i}}^{N}\bar{V}_{d_s}^{(s)}(x_s-t)}\rho\left(i\bar{d}^{(i)}(\bar{x}-t)^{(i)}\right)dt+$$
$$+\int_0^{\infty}\frac{v_1^{(i)}(x_j+t)\prod\limits_{\substack{k=1,\\k\neq i}}^{N}\bar{V}_{d_k}^{(k)}(x_k)}{\prod\limits_{\substack{s=1,\\s\neq j}}^{N}\bar{V}_{d_s}^{(s)}(x_s-x_j)}\rho\left(j\bar{d}^{(i)}\left[(\bar{x}-x_j)^{(i)},t\right]\right)dt. \tag{3.5}$$

2. В случае состояний $i\bar{d}\bar{x},\ \bar{d}_i=0$ возможны переходы:

a) $i\bar{d}^{(i)}(\bar{x}-t)^{(i)} \to i\bar{d}\bar{x},\ \ 0<t<x_j,\ \bar{d}_i^{(i)}=\bar{1},$

b) $j\bar{d}^{(i)}\left[(\bar{x}-x_j)^{(i)},t\right] \to i\bar{d}\bar{x},\ \ t\geq 0,\ \bar{d}_i^{(i)}=\bar{1}.$

Следовательно,

$$\rho\left(i\bar{d}\bar{x}\right)=\int_0^{x_j}\frac{w_{\bar{1},0}^{(i)}(t)\prod\limits_{\substack{k=1,\\k\neq i}}^{N}\bar{V}_{d_k}^{(k)}(x_k)}{\prod\limits_{\substack{s=1,\\s\neq i}}^{N}\bar{V}_{d_s}^{(s)}(x_s-t)}\rho\left(i\bar{d}^{(i)}(\bar{x}-t)^{(i)}\right)dt+$$
$$+\int_0^{\infty}\frac{w_{\bar{1},0}^{(i)}(x_j+t)\prod\limits_{\substack{k=1,\\k\neq i}}^{N}\bar{V}_{d_k}^{(k)}(x_k)}{\prod\limits_{\substack{s=1,\\s\neq j}}^{N}\bar{V}_{d_s}^{(s)}(x_s-x_j)}\rho\left(j\bar{d}^{(i)}\left[(\bar{x}-x_j)^{(i)},t\right]\right)dt. \tag{3.6}$$

3. В случае состояний $i\bar{d}\bar{x},\ \bar{d}_i=1$ возможны переходы:

a) $i\bar{d}^{(i)}(\bar{x}-t)^{(i)} \to i\bar{d}\bar{x},\ \ 0<t<x_j,\ \bar{d}_i^{(i)}=\bar{1},$

b) $i\bar{d}^{(i)}(\bar{x}-t)^{(i)} \to i\bar{d}\bar{x},\ \ 0<t<x_j,\ \ \bar{d}_i^{(i)}=0,$

c) $j\bar{d}^{(i)}\left[(\bar{x}-x_j)^{(i)},t\right] \to i\bar{d}\bar{x},\ \ t\ge 0,\ \bar{d}_i^{(i)}=\bar{1}.$

d) $j\bar{d}^{(i)}\left[(\bar{x}-x_j)^{(i)},t\right] \to i\bar{d}\bar{x},\ \ t\ge 0,\ \bar{d}_i^{(i)}=0.$

Следовательно,

$$\rho\left(i\bar{d}\bar{x}\right)=\int_0^{x_j}\frac{w_{1,1}^{(i)}(t)\prod\limits_{\substack{k=1,\\k\ne i}}^{N}\bar{V}_{d_k}^{(k)}(x_k)}{\prod\limits_{\substack{s=1,\\s\ne i}}^{N}\bar{V}_{d_s}^{(s)}(x_s-t)}\rho\left(i\bar{d}^{(i)}(\bar{x}-t)^{(i)}\right)dt+$$

$$+\int_0^{x_j}\frac{w_{0,1}^{(i)}(t)\prod\limits_{\substack{k=1,\\k\ne i}}^{N}\bar{V}_{d_k}^{(k)}(x_k)}{\prod\limits_{\substack{s=1,\\s\ne i}}^{N}\bar{V}_{d_s}^{(s)}(x_s-t)}\rho\left(i\bar{d}^{(i)}(\bar{x}-t)^{(i)}\right)dt+$$

$$+\int_0^{\infty}\frac{w_{1,1}^{(i)}(x_j+t)\prod\limits_{\substack{k=1,\\k\ne i}}^{N}\bar{V}_{d_k}^{(k)}(x_k)}{\prod\limits_{\substack{s=1,\\s\ne j}}^{N}\bar{V}_{d_s}^{(s)}(x_s-x_j)}\rho\left(j\bar{d}^{(i)}\left[(\bar{x}-x_j)^{(i)},t\right]\right)dt+$$

$$+\int_0^{\infty}\frac{w_{0,1}^{(i)}(x_j+t)\prod\limits_{\substack{k=1,\\k\ne i}}^{N}\bar{V}_{d_k}^{(k)}(x_k)}{\prod\limits_{\substack{s=1,\\s\ne j}}^{N}\bar{V}_{d_s}^{(s)}(x_s-x_j)}\rho\left(j\bar{d}^{(i)}\left[(\bar{x}-x_j)^{(i)},t\right]\right)dt. \qquad (3.7)$$

4. $$\sum_{\bar{d}\in D}\sum_{i=1}^{N}\int_{R_+^{(N,i)}}\rho\left(i\bar{d}\bar{x}\right)\bar{d}\bar{x}^{(i)}=1.$$ (условие нормировки) (3.8)

Обозначим $\tilde{\rho}\left(i\bar{d}\bar{x}\right)=\dfrac{\rho\left(i\bar{d}\bar{x}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{N}\bar{V}_{d_k}^{(k)}(t)}$. Тогда система уравнений (3.5) – (3.8) будет иметь следующий вид:

1. В случае состояний $i\bar{d}\bar{x},\ \bar{d}_i = \bar{1}$

$$\tilde{\rho}\left(i\bar{d}\bar{x}\right) = \int_0^{x_j} v_1^{(i)}(t)\tilde{\rho}\left(i\bar{d}^{(i)}\left(\bar{x}-t\right)^{(i)}\right)dt + \int_0^{\infty} v_1^{(i)}(x_j+t)\tilde{\rho}\left(j\bar{d}^{(i)}\left[\left(\bar{x}-x_j\right)^{(i)},t\right]\right)dt. \quad (3.9)$$

2. В случае состояний $i\bar{d}\bar{x},\ \bar{d}_i = 0$

$$\tilde{\rho}\left(i\bar{d}\bar{x}\right) = \int_0^{x_j} w_{\bar{1},0}^{(i)}(t)\tilde{\rho}\left(i\bar{d}^{(i)}\left(\bar{x}-t\right)^{(i)}\right)dt + \int_0^{\infty} w_{\bar{1},0}^{(i)}(x_j+t)\tilde{\rho}\left(j\bar{d}^{(i)}\left[\left(\bar{x}-x_j\right)^{(i)},t\right]\right)dt. \quad (3.10)$$

3. В случае состояний $i\bar{d}\bar{x},\ \bar{d}_i = 1$

$$\tilde{\rho}\left(i\bar{d}\bar{x}\right) = \int_0^{x_j} w_{\bar{1},1}^{(i)}(t)\tilde{\rho}\left(i\bar{d}^{(i)}\left(\bar{x}-t\right)^{(i)}\right)dt + \int_0^{x_j} w_{0,1}^{(i)}(t)\tilde{\rho}\left(i\bar{d}^{(i)}\left(\bar{x}-t\right)^{(i)}\right)dt +$$

$$+\int_0^{\infty} w_{\bar{1},1}^{(i)}(x_j+t)\tilde{\rho}\left(j\bar{d}^{(i)}\left[\left(\bar{x}-x_j\right)^{(i)},t\right]\right)dt + \int_0^{\infty} w_{0,1}^{(i)}(x_j+t)\tilde{\rho}\left(j\bar{d}^{(i)}\left[\left(\bar{x}-x_j\right)^{(i)},t\right]\right)dt. \quad (3.11)$$

4. $$\sum_{\bar{d}\in D}\sum_{i=1}^{N}\int_{R_+^{(N,i)}} \tilde{\rho}\left(i\bar{d}\bar{x}\right)\prod_{k=1}^{N}\bar{V}_{d_k}^{(k)}(t)\bar{d}\bar{x}^{(i)} = 1.$$ (условие нормировки) (3.12)

Введем следующие обозначения:

$$\rho_z^{(k)} = \begin{cases}\rho^{(k)}, \text{ если } z = 1,\bar{1}, \\ \bar{\rho}^{(k)}, \text{ если } z = 0,\end{cases} \quad \rho^{(k)} = \frac{1}{2+P(\beta_k > \tau_k)}, \quad \bar{\rho}^{(k)} = \frac{P(\beta_k > \tau_k)}{2+P(\beta_k > \tau_k)},$$

$$\bar{\rho}^{(k)} = \rho^{(k)} \cdot P(\beta_k > \tau_k).$$

Лемма. Решение системы уравнений (3.9) – (3.12) имеет следующий вид:

$$\tilde{\rho}(i\bar{d}\bar{x}) = \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)}, \quad (3.13)$$

где постоянная ρ_0 находится из условия нормировки (3.12).

Доказательство. Подстановкой проверим, что функции $\tilde{\rho}(i\bar{d}\bar{x}) = \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)}$ удовлетворяют системе уравнений (3.9) – (3.12) при любом значении ρ_0.

1. В случае состояний $i\bar{d}\bar{x},\ \bar{d}_i = \bar{1}$

$$\tilde{\rho}(i\bar{d}\bar{x}) = \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} = \int_0^{x_j} v_1^{(i)}(t)\rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} dt + \int_0^{\infty} v_1^{(i)}(x_j + t)\rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} dt =$$

$$= \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} \left(\int_0^{x_j} v_1^{(i)}(t)dt + \int_0^{\infty} v_1^{(i)}(x_j + t)dt \right) = \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} \left(\int_0^{x_j} v_1^{(i)}(t)dt + \int_{x_j}^{\infty} v_1^{(i)}(t')dt' \right) =$$

$$= \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} \int_0^{\infty} v_1^{(i)}(t)dt = \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} \int_0^{\infty} f_i(t)dt = \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)}.$$

2. В случае состояний $i\bar{d}\bar{x},\ \bar{d}_i = 0$

$$\tilde{\rho}\left(i\bar{d}\bar{x}\right) = \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} = \int_0^{x_j} w_{\bar{1},0}^{(i)}(t)\rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} dt + \int_0^{\infty} w_{\bar{1},0}^{(i)}(x_j + t)\rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} dt =$$

$$= \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} \left(\int_0^{x_j} w_{\bar{1},0}^{(i)}(t)dt + \int_0^{\infty} w_{\bar{1},0}^{(i)}(x_j + t)dt \right) = \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} \left(\int_0^{x_j} w_{\bar{1},0}^{(i)}(t)dt + \int_{x_j}^{\infty} w_{\bar{1},0}^{(i)}(t')dt' \right) =$$

$$= \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} \int_0^{\infty} w_{\bar{1},0}^{(i)}(t)dt = \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} \int_0^{\infty} f_{\bar{1},0}^{(i)}(t)dt = \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)}.$$

3. В случае состояний $i\bar{d}\bar{x},\ \bar{d}_i = 1$

$$\tilde{\rho}\left(i\bar{d}\bar{x}\right) = \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} = \int_0^{x_j} w_{\bar{1},1}^{(i)}(t)\rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} dt + \int_0^{x_j} w_{0,1}^{(i)}(t)\rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} dt +$$

$$+ \int_0^{\infty} w_{\bar{1},1}^{(i)}(x_j + t)\rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} dt + \int_0^{\infty} w_{0,1}^{(i)}(x_j + t)\rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} dt =$$

$$= \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} \left(\int_0^{x_j} w_{\bar{1},1}^{(i)}(t)dt + \int_0^{x_j} w_{0,1}^{(i)}(t)dt + \int_0^{\infty} w_{\bar{1},1}^{(i)}(x_j + t)dt + \int_0^{\infty} w_{0,1}^{(i)}(x_j + t)dt \right) =$$

$$= \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} \left(\int_0^{x_j} w_{\bar{1},1}^{(i)}(t)dt + \int_{x_j}^{\infty} w_{\bar{1},1}^{(i)}(t')dt' + \int_0^{x_j} w_{0,1}^{(i)}(t)dt + \int_{x_j}^{\infty} w_{0,1}^{(i)}(t')dt' \right) =$$

$$= \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} \left(\int_0^\infty w_{\bar{1},1}^{(i)}(t)dt + \int_0^\infty w_{0,1}^{(i)}(t)dt \right) = \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} \left(\int_0^\infty \bar{R}_i(t) g_i(t)dt + \int_0^\infty v_0^{(i)}(t)dt \right) =$$

$$= \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} \left(P\left(\tau_i > \beta_i\right) + \int_0^\infty dt \int_0^\infty g_i(y+t) r_i(y)dy \right) =$$

$$= \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} \left(P\left(\tau_i > \beta_i\right) + \int_0^\infty r_i(t)\bar{G}_i(t)dt \right) = \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} \left(P\left(\tau_i > \beta_i\right) + P\left(\tau_i \le \beta_i\right) \right) =$$

$$= \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)}.$$

Лемма доказана.

Следовательно, стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n; \mathrm{n} \ge 0\}$ рассматриваемой системы имеет следующий вид:

$$\rho(i\bar{d}\bar{x}) = \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} \prod_{\substack{j=1, \\ j \ne i}}^{N} \bar{V}_{d_j}^{(j)}(x_j), \tag{3.14}$$

где константа ρ_0 находится из условия нормировки.

3.2. Нахождение стационарных характеристик надежности и эффективности

Для нахождения стационарного коэффициента готовности K_Γ, средней стационарной наработки системы на отказ T_+, среднего стационарного времени восстановления системы T_- используем следующие формулы (2.20).

Рассмотрим понятие отказа системы: исходя из анализа структуры системы, на множестве всех векторов $D = \left\{\bar{d}\right\}$ задается структурная функция [70] $g(\bar{d})$ такая, что:

$$g(\bar{d}) = \begin{cases} 1, \text{ если система работоспособна} \\ \text{при данном сочетании компонентов вектора } \bar{d}; \\ 0, \text{ если система в отказе.} \end{cases}$$

Множество значений вектора $\bar{d}$, при котором система работоспособна, обозначим D_+, а множество значений, при которых система находится в D_-, т.е. $D_+ = \left\{\bar{d} : g(\bar{d}) = 1\right\}$, $D_- = \left\{\bar{d} : g(\bar{d}) = 0\right\}$. По предположению, $D = D_+ \cup D_-$, $D_+ \cap D_- = \varnothing$.

В соответствии с выбором D_+ и D_- фазовое пространство состояний E разбивается на множества E_+ и E_- работоспособных и отказовых состояний. $E = E_+ \cup E_-$, $E_+ \cap E_- = \varnothing$.

Найдем числители формул (3.15). Используя (3.2), определим средние времена пребывания в состояниях:

$$M\theta_{i\bar{d}\bar{x}} = \frac{\int\limits_0^\infty \prod\limits_{k=1}^N \bar{V}_{d_k}^{(k)}(x_k + t)dt}{\prod\limits_{\substack{s=1,\\ s\neq i}}^N \bar{V}_{d_s}^{(s)}(x_s)}, x_i = 0. \tag{3.16}$$

Используя (3.16) и стационарное распределение (3.14), получаем:

$$\int\limits_{E_+} m(e)\rho(de) = \sum_{\bar{d}\in D_+} \sum_{i=1}^N \int\limits_0^\infty \ldots \int\limits_0^\infty \rho_0 \prod_{k=1}^N \rho_{d_k}^{(k)} \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^N \bar{V}_{d_j}^{(j)}(x_j) d\bar{x}^{(i)} \int\limits_0^\infty \frac{\prod\limits_{k=1}^N \bar{V}_{d_k}^{(k)}(x_k + t)}{\prod\limits_{\substack{s=1,\\ s\neq i}}^N \bar{V}_{d_s}^{(s)}(x_s)} dt =$$

$$= \sum_{\bar{d}\in D_+} \rho_0 \prod_{k=1}^N \rho_{d_k}^{(k)} \sum_{i=1}^N \int\limits_0^\infty \ldots \int\limits_0^\infty d\bar{x}^{(i)} \int\limits_0^\infty \prod_{k=1}^N \bar{V}_{d_k}^{(k)}(x_k + t)dt = \sum_{\bar{d}\in D_+} \rho_0 \prod_{k=1}^N \rho_{d_k}^{(k)} \prod_{k=1}^N \int\limits_0^\infty \bar{V}_{d_k}^{(k)}(x_k)dx_k =$$

$$= \rho_0 \sum_{\bar{d}\in D_+} \prod_{k=1}^N \rho_{d_k}^{(k)} M\delta_{d_k}^{(k)} = \rho_0 \sum_{\bar{d}\in D_+} \prod_{k:d_k=1} \rho_{d_k}^{(k)} M\delta_{d_k}^{(k)} \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} \rho_{d_k}^{(k)} M\delta_{d_k}^{(k)} \cdot \prod_{k:d_k=0} \rho_{d_k}^{(k)} M\delta_{d_k}^{(k)} =$$

$$= \rho_0 \sum_{\bar{d}\in D_+} \prod_{k:d_k=1} \rho^{(k)} M\delta_1^{(k)} \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} \rho^{(k)} M\delta_{\bar{1}}^{(k)} \cdot \prod_{k:d_k=0} \bar{\rho}^{(k)} M\delta_0^{(k)} =$$

$$= \rho_0 \prod_{k=1}^N \rho^{(k)} \cdot \sum_{\bar{d}\in D_+} \prod_{k:d_k=1} M\delta_1^{(k)} \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M\delta_{\bar{1}}^{(k)} \cdot \prod_{k:d_k=0} P\left(\beta_k > \tau_k\right) M\delta_0^{(k)} =$$

$$= \rho_0 \prod_{k=1}^N \rho^{(k)} \cdot \sum_{\bar{d}\in D_+} \prod_{k:d_k=1} M\alpha_k \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M\left(\beta_k \wedge \tau_k\right) \cdot \prod_{k:d_k=0} P\left(\beta_k > \tau_k\right) M\left(\left[\beta_k - \tau_k\right]^+\right),$$

где $M\left(\beta_k \wedge \tau_k\right) = \int\limits_0^\infty \bar{G}_k(t)\bar{R}_k(t)dt$, $M\left(\left[\beta_k - \tau_k\right]^+\right) = \int\limits_0^\infty \bar{G}_k(t)R_k(t)dt \Big/ P(\beta_k > \tau_k)$.

В преобразованиях использовалась следующая формула, доказанная в [20, 16]:

$$\sum_{j=1}^{N} \int\limits_0^\infty \ldots \int\limits_0^\infty \bar{F}_j(t)\left(\prod_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{N} \bar{F}_k(t+y_k)dy_k\right)dt = \prod_{j=1}^{N} M\alpha_j.$$

Соответственно,

$$\int\limits_{E_-} m(e)\rho(de) = \rho_0 \sum_{\bar{d}\in D_-} \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} M\delta_{d_k}^{(k)} =$$

$$= \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho^{(k)} \cdot \sum_{\bar{d}\in D_-} \prod_{k:d_k=1} M\alpha_k \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M\left(\beta_k \wedge \tau_k\right) \cdot \prod_{k:d_k=0} P\left(\beta_k > \tau_k\right) M\left(\left[\beta_k - \tau_k\right]^+\right).$$

$$\int\limits_{E} m(e)\rho(de) = \rho_0 \sum_{\bar{d}\in D} \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} M\delta_{d_k}^{(k)} = \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho^{(k)} \cdot \sum_{k=1}^{N}\left(M\delta_1^{(k)} + M\delta_{\bar{1}}^{(k)} + p_k M\delta_0^{(k)}\right) =$$

$$= \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho^{(k)} \cdot \prod_{k=1}^{N}\left(M\alpha_k + M\left(\beta_k \wedge \tau_k\right) + P(\beta_k > \tau_k) M\left(\left[\beta_k - \tau_k\right]^+\right)\right) =$$

$$= \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho^{(k)} \cdot \prod_{k=1}^{N}\left(M\alpha_k + \int\limits_0^\infty \bar{G}_k(t)\bar{R}_k(t)dt + P(\beta_k > \tau_k)\frac{1}{P(\beta_k > \tau_k)}\int\limits_0^\infty \bar{G}_k(t)R_k(t)dt\right) =$$

$$= \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho^{(k)} \cdot \prod_{k=1}^{N}\left(M\alpha_k + M\beta_k\right),$$

Следовательно, стационарный коэффициент готовности равен

$$K_{\Gamma}=\frac{\sum\limits_{\bar{d}\in D_{+}}\prod\limits_{k=1}^{N}\rho_{d_k}^{(k)}\prod\limits_{k=1}^{N}M\delta_{d_k}^{(k)}}{\sum\limits_{\bar{d}\in D}\prod\limits_{k=1}^{N}\rho_{d_k}^{(k)}\prod\limits_{k=1}^{N}M\delta_{d_k}^{(k)}}=\frac{\sum\limits_{\bar{d}\in D_{+}}\prod\limits_{k=1}^{N}\rho_{d_k}^{(k)}M\delta_{d_k}^{(k)}}{\prod\limits_{k=1}^{N}\rho_{d_k}^{(k)}\left(M\delta_{1}^{(k)}+M\delta_{\bar{1}}^{(k)}+P\left(\beta_k>\tau_k\right)M\delta_{0}^{(k)}\right)}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{\bar{d}\in D_{+}}\prod\limits_{k=1}^{N}\rho_{d_k}^{(k)}M\delta_{d_k}^{(k)}}{\prod\limits_{k=1}^{N}\rho_{d_k}^{(k)}\left(M\alpha_k+M\left(\beta_k\wedge\tau_k\right)+P\left(\beta_k>\tau_k\right)M\left[\beta_k-\tau_k\right]^{+}\right)}= \tag{3.17}$$

$$=\frac{\sum\limits_{\bar{d}\in D_{+}}\prod\limits_{k:d_k=1}M\alpha_k\cdot\prod\limits_{k:d_k=\bar{1}}M\left(\beta_k\wedge\tau_k\right)\cdot\prod\limits_{k:d_k=0}P\left(\beta_k>\tau_k\right)M\left(\left[\beta_k-\tau_k\right]^{+}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{N}\left(M\alpha_k+M\beta_k\right)}.$$

Для нахождения T_{+}, T_{-} введем следующие обозначения:

D_{-}^{1} – множество векторов $\bar{d}\in D_{-}$ таких, что изменение в состоянии одной компоненты переводит систему в работоспособное состояние (в D_{+}).

D_{+}^{0} – множество векторов $\bar{d}\in D_{+}$ таких, что изменение в состоянии одной компоненты переводит систему в отказовое состояние (в D_{-}).

$G(\bar{d})$ – множество номеров компонент вектора $\bar{d}\in D_{+}^{0}$, изменение значения каждой из которых переводит вектор $\bar{d}$ в D_{-}.

Тогда,

$$\int\limits_{E_{+}}P(e,E_{-})\rho(de)=\sum_{\bar{d}\in D_{+}^{0}}\left(\sum_{i=1}^{N}\underbrace{\int_{0}^{\infty}\ldots\int_{0}^{\infty}}_{N-1}\rho_0\prod_{k=1}^{N}\rho_{d_k}^{(k)}\prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N}\bar{V}_{d_j}^{(j)}(x_j)d\bar{x}^{(i)}\int_{0}^{\infty}\frac{w_{d_j,d_j'}^{(j)}(x_j+t)\prod\limits_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{N}\bar{V}_{d_k}^{(k)}(x_k)}{\prod\limits_{\substack{s=1,\\ s\neq i}}^{N}\bar{V}_{d_s}^{(s)}(x_s)}dt+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{N}\underbrace{\int_{0}^{\infty}\ldots\int_{0}^{\infty}}_{N-1}\rho_0\prod_{k=1}^{N}\rho_{d_k}^{(k)}\prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N}\bar{V}_{d_j}^{(j)}(x_j)d\bar{x}^{(i)}\int_{0}^{\infty}\frac{w_{d_i,d_i'}^{(i)}(t)\prod\limits_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{N}\bar{V}_{d_k}^{(k)}(x_k+t)}{\prod\limits_{\substack{s=1,\\ s\neq i}}^{N}\bar{V}_{d_s}^{(s)}(x_s)}dt\right)=$$

$$= \sum_{\bar{d}\in D_+^0} \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} \sum_{i=1}^{N} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty d\bar{x}^{(i)} \left(\int_0^\infty w_{d_j,d_j'}^{(j)}(x_j+t) \prod_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{N} \bar{V}_{d_k}^{(k)}(x_k)dt + \int_0^\infty w_{d_i,d_i'}^{(i)}(t) \prod_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{N} \bar{V}_{d_k}^{(k)}(x_k+t)dt \right) =$$

$$N-1$$

$$= \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho_{d_k}^{(k)} \sum_{\bar{d}\in D_+^0} \left(\sum_{i=1}^{N} P(\beta_j > \tau_j) \int_0^\infty \prod_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{N} \bar{V}_{d_k}^{(k)}(x_k)dx_k \right) =$$

$$= \rho_0 \prod_{k=1}^{N} \rho^{(k)} \sum_{\bar{d}\in D_+^0} \sum_{j\in G(\bar{d})} I(d_j) \cdot \prod_{\substack{k:d_k=1,\\ k\neq j}} M\alpha_k \cdot \prod_{\substack{k:d_k=\bar{1},\\ k\neq j}} M\left(\beta_k \wedge \tau_k\right) \cdot \prod_{\substack{k:d_k=0,\\ k\neq j}} P\left(\beta_k > \tau_k\right) M\left(\left[\beta_k - \tau_k\right]^+\right),$$

где

$$I(d_j) = \begin{cases} P\left(\beta_j > \tau_j\right), \text{ если } d_j = \bar{1}, \\ \quad 1, \qquad \text{если } d_j = 1,0. \end{cases}$$

В преобразованиях использовалась следующая формула [20, 16]:

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{R_+^{N,k}} \int_0^\infty f_i(x_i+t) \prod_{\substack{r=1,\\ r\neq i}}^{N} \bar{F}_r(x_r+t) d\bar{x}^{(k)} dt = \prod_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{N} M\alpha_k .$$

Следовательно,

$$T_+ = \frac{\sum_{\bar{d}\in D_+} \prod_{k:d_k=1} M\alpha_k \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M\left(\beta_k \wedge \tau_k\right) \cdot \prod_{k:d_k=0} P\left(\beta_k > \tau_k\right) M\left(\left[\beta_k - \tau_k\right]^+\right)}{\sum_{\bar{d}\in D_+^0} \sum_{j\in G(\bar{d})} I(d_j) \cdot \prod_{\substack{k:d_k=1,\\ k\neq j}} M\alpha_k \cdot \prod_{\substack{k:d_k=\bar{1},\\ k\neq j}} M\left(\beta_k \wedge \tau_k\right) \cdot \prod_{\substack{k:d_k=0,\\ k\neq j}} P\left(\beta_k > \tau_k\right) M\left(\left[\beta_k - \tau_k\right]^+\right)}, \quad (3.18)$$

$$T_- = \frac{\sum_{\bar{d}\in D_-} \prod_{k:d_k=1} M\alpha_k \cdot \prod_{k:d_k=\bar{1}} M\left(\beta_k \wedge \tau_k\right) \cdot \prod_{k:d_k=0} P\left(\beta_k > \tau_k\right) M\left(\left[\beta_k - \tau_k\right]^+\right)}{\sum_{\bar{d}\in D_+^0} \sum_{j\in G(\bar{d})} I(d_j) \cdot \prod_{\substack{k:d_k=1,\\ k\neq j}} M\alpha_k \cdot \prod_{\substack{k:d_k=\bar{1},\\ k\neq j}} M\left(\beta_k \wedge \tau_k\right) \cdot \prod_{\substack{k:d_k=0,\\ k\neq j}} P\left(\beta_k > \tau_k\right) M\left(\left[\beta_k - \tau_k\right]^+\right)}. \quad (3.19)$$

Найдем характеристики эффективности данной системы: среднюю удельную прибыль S в единицу календарного времени и средние удельные затраты C в единицу времени исправного функционирования системы. Для их определения воспользуемся формулами [62]:

$$S=\frac{\int\limits_E m(e)\,f_s(e)\rho(de)}{\int\limits_E m(e)\rho(de)},\qquad C=\frac{\int\limits_E m(e)\,f_c(e)\rho(de)}{\int\limits_{E_+} m(e)\rho(de)},\tag{3.20}$$

где $f_s(e)$, $f_c(e)$ – функции, определяющие соответственно доход и затраты в каждом состоянии.

Пусть $f_s(e)=\begin{cases}c_1,\ e\in E_+,\\ -c_2,\ e\in E_-,\end{cases}$ $f_c(e)=\begin{cases}0,\ e\in E_+,\\ c_2,\ e\in E_-.\end{cases}$

где c_1 – прибыль, получаемая в единицу времени исправного функционирования системы, c_2 – потери в единицу времени отказа. Используя формулы (3.20), получаем:

$$S=\frac{c_1\rho_0\sum\limits_{\vec{d}\in D_+}\prod\limits_{k=1}^{N}\rho_{d_k}^{(k)}M\delta_{d_k}^{(k)}-c_2\rho_0\sum\limits_{\vec{d}\in D_-}\prod\limits_{k=1}^{N}\rho_{d_k}^{(k)}M\delta_{d_k}^{(k)}}{\rho_0\sum\limits_{\vec{d}\in D}\prod\limits_{k=1}^{N}\rho_{d_k}^{(k)}M\delta_{d_k}^{(k)}}=$$

$$=\frac{c_1\sum\limits_{\vec{d}\in D_+}\prod\limits_{k:d_k=1}M\alpha_k\cdot\prod\limits_{k:d_k=\bar{1}}M\left(\beta_k\wedge\tau_k\right)\cdot\prod\limits_{k:d_k=0}P\left(\beta_k>\tau_k\right)M\left(\left[\beta_k-\tau_k\right]^+\right)}{\prod\limits_{k=1}^{N}\left(M\alpha_k+M\beta_k\right)}-\tag{3.21}$$

$$-\frac{-c_2\sum\limits_{\vec{d}\in D_-}\prod\limits_{k:d_k=1}M\alpha_k\cdot\prod\limits_{k:d_k=\bar{1}}M\left(\beta_k\wedge\tau_k\right)\cdot\prod\limits_{k:d_k=0}P\left(\beta_k>\tau_k\right)M\left(\left[\beta_k-\tau_k\right]^+\right)}{\prod\limits_{k=1}^{N}\left(M\alpha_k+M\beta_k\right)},$$

$$C=\frac{c_2\rho_0\sum\limits_{\vec{d}\in D_-}\prod\limits_{k=1}^{N}\rho_{d_k}^{(k)}M\delta_{d_k}^{(k)}}{\rho_0\sum\limits_{\vec{d}\in D_+}\prod\limits_{k=1}^{N}\rho_{d_k}^{(k)}M\delta_{d_k}^{(k)}}=$$

$$=\frac{c_2\sum\limits_{\vec{d}\in D_-}\prod\limits_{k:d_k=1}M\alpha_k\cdot\prod\limits_{k:d_k=\bar{1}}M\left(\beta_k\wedge\tau_k\right)\cdot\prod\limits_{k:d_k=0}P\left(\beta_k>\tau_k\right)M\left(\left[\beta_k-\tau_k\right]^+\right)}{\sum\limits_{\vec{d}\in D_+}\prod\limits_{k:d_k=1}M\alpha_k\cdot\prod\limits_{k:d_k=\bar{1}}M\left(\beta_k\wedge\tau_k\right)\cdot\prod\limits_{k:d_k=0}P\left(\beta_k>\tau_k\right)M\left(\left[\beta_k-\tau_k\right]^+\right)}.\tag{3.22}$$

В случае когда $\tau_k = h_k = const$, $M\left(\beta_k \wedge \tau_k\right) = M\left(\beta_k \wedge h_k\right) = \int_0^{h_k} \bar{G}_k(t)dt$,

$$M\left(\left[\beta_k - \tau_k\right]^+\right) = M\left(\left[\beta_k - h_k\right]^+\right) = \int_{h_k}^{\infty} \bar{G}_k(t)dt \Big/ P(\beta_k > h_k).$$

В качестве иллюстративного примера использования формул (3.17) – (3.19), (3.21) – (3.22) рассмотрим систему, состоящую из 3-х компонентов с параллельным соединением, у которой время безотказной работы компонентов K_1, K_2, K_3 равны $M\alpha_1$=8,33 ч, $M\alpha_2 = M\alpha_3$=6,25 ч; времена восстановления компонентов K_1, K_2, K_3 равны $M\beta_1$=0,71 ч, $M\beta_2 = M\beta_3$=0,83 ч, СВ α_i, β_i, $i = 1,2,3$, имеют распределение Эрланга 5-го порядка; c_1=10 у.е., c_2=15 у.е. Каждая компонента имеет неслучайный резерв времени ($R_i(t) = 1(t - h_i)$, $h_1 = h_2 = h_3$), который изменяется от 0 до 0,7 часа с шагом 0,1 ч. Найдены соответствующие значения $T_+(h_1, h_2, h_3)$, $T_-(h_1, h_2, h_3)$, $K_Г(h_1, h_2, h_3)$, $C(h_1, h_2, h_3)$, $S(h_1, h_2, h_3)$ рассматриваемой системы. Результаты представлены в Таблице 3.1.

Таблица 3.1

Влияние величины резерва времени на характеристики надежности и эффективности системы

h_1, ч.	h_2, ч.	h_3, ч.	$T_-(h_1, h_2, h_3)$, ч.	$T_+(h_1, h_2, h_3)$, ч.	$K_Г(h_1, h_2, h_3)$	$C(h_1, h_2, h_3)$, (у.е./ч.) *10^{-3}	$S(h_1, h_2, h_3)$, у.е./ч.
0	0	0	0,26316	316,51316	0,99917	12,47	9,97923
0,1	0,1	0,1	0,22974	388,00755	0,99941	8,8815	9,98521
0,2	0,2	0,2	0,19815	499,29585	0,9996	5,953	9,99008
0,3	0,3	0,3	0,17123	693,2207	0,99975	3,70506	9,99383
0,4	0,4	0,4	0,14992	1,05977*10^3	0,99986	2,12193	9,99646
0,5	0,5	0,5	0,13357	1,79836*10^3	0,99993	1,11413	9.99814
0,6	0,6	0,6	0,12109	3,38443*10^3	0,99996	0,53668	9,99911
0,7	0,7	0,7	0,11147	7,023*10^3	0,99998	0,23807	9,9996

Анализ данных таблицы показывает значительное влияние резерва времени на характеристики надежности и эффективности системы.

Данные формулы могут быть использованы для анализа надежности и эффективности многокомпонентных систем «газопровод – подземное хранилище газа – потребитель»; нефтепровод с резервуарными парками (для хранения промежуточных запасов нефти); систем электроэнергетики, где резерв времени у компонента обеспечивается наличием накопителя энергии.

3.3. Случаи параллельного и последовательного соединения элементов

Рассмотрим частные случаи последовательного и параллельного соединения компонентов системы.

1. Последовательное соединение компонент системы.

При данном соединении отказ системы наступает тогда, когда хотя бы один из компонент системы находится в отказе. Формулы (3.17) – (3.19) принимают вид:

$$K_{\Gamma} = \frac{\prod_{i=1}^{N}\left(M\alpha_i + M\left(\beta_i \wedge \tau_i\right)\right)}{\prod_{i=1}^{N}\left(M\alpha_i + M\beta_i\right)},$$

$$T_{+} = \frac{\prod_{i=1}^{N}\left(M\alpha_i + M\left(\beta_i \wedge \tau_i\right)\right)}{\sum_{i=1}^{N}\left(P\left(\beta_i > \tau_i\right)\prod_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{N}\left(M\alpha_k + M\left(\beta_k \wedge \tau_k\right)\right)\right)},$$

$$T_{-} = \frac{\sum_{i=1}^{N}P\left(\beta_i > \tau_i\right)M\left([\beta_i - \tau_i]^{+}\right)\prod_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{N}\left(M\alpha_k + M\left(\beta_k \wedge \tau_k\right)\right) + \prod_{i=1}^{N}P\left(\beta_i > \tau_i\right)M\left([\beta_i - \tau_i]^{+}\right)}{\sum_{i=1}^{N}\left(P\left(\beta_i > \tau_i\right)\prod_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{N}\left(M\alpha_k + M\left(\beta_k \wedge \tau_k\right)\right)\right)}.$$

2. Параллельное соединение.

В этом случае отказ системы наступает тогда и только тогда, когда все компоненты системы находятся в отказе.

Следовательно, множества работоспособных и отказовых состояний системы имеют вид:

$$E_+ = \{i\bar{d}\bar{x} : \bar{d} = (d_1, d_2, ..., d_N),\ \bar{d} \neq (0,0,...,0),\ \bar{x} = (x_1, ..., x_k, ..., x_N),\ x_k \geq 0\},$$

$$E_- = \{i\bar{d}\bar{x} : \bar{d} = (d_1, d_2, ..., d_N),\ \bar{d} = (0,0,...,0),\ \bar{x} = (x_1, ..., x_k, ..., x_N),\ x_k \geq 0\}.$$

Формулы (3.17) – (3.19) принимают вид:

$$K_Г = \frac{\sum_{i=1}^{N} P(\beta_i > \tau_i) M\left([\beta_i - \tau_i]^+\right) \prod_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{N} \left(M\alpha_k + M(\beta_k \wedge \tau_k)\right) + \prod_{i=1}^{N} \left(M\alpha_i + M(\beta_i \wedge \tau_i)\right)}{\prod_{i=1}^{N} \left[M\alpha_i + M\beta_i\right]},$$

$$T_- = \frac{\prod_{i=1}^{N} P(\beta_i > \tau_i) M\left([\beta_i - \tau_i]^+\right)}{\sum_{i=1}^{N} \left(P(\beta_i > \tau_i) \prod_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{N} P(\beta_k > \tau_k) M\left([\beta_k - \tau_k]^+\right) \right)},$$

$$T_+ = \frac{\sum_{i=1}^{N} P(\beta_i > \tau_i) M\left([\beta_i - \tau_i]^+\right) \prod_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{N} \left(M\alpha_k + M(\beta_k \wedge \tau_k)\right) + \prod_{i=1}^{N} \left(M\alpha_i + M(\beta_i \wedge \tau_i)\right)}{\sum_{i=1}^{N} \left(P(\beta_i > \tau_i) \prod_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{N} P(\beta_k > \tau_k) M\left([\beta_k - \tau_k]^+\right) \right)}.$$

3.4. Расчет характеристик надежности и эффективности нефтепровода с резервуарными парками

Рассмотрим задачу, представленную в монографии [52]. Имеется однониточный нефтепровод с резервуарными парками (для хранения промежуточных запасов нефти). Пусть каждый линейный узел (ЛУ) имеет свой резервуарный парк (поэлементный резерв времени).

Резервуарные парки в случае отказа в системе позволяют накапливать в течение некоторого времени нефть, идущую от промысла, в свободные емкости, в то же время имеющиеся запасы дают возможность снабжать потребителя нефтью бесперебойно в течение определенного времени.

Если происходит отказ i-ого ЛУ, то он не приводит к отказу всего нефтепровода до тех пор, пока не исчерпаются запасы нефти в i-том резервуарном парке.

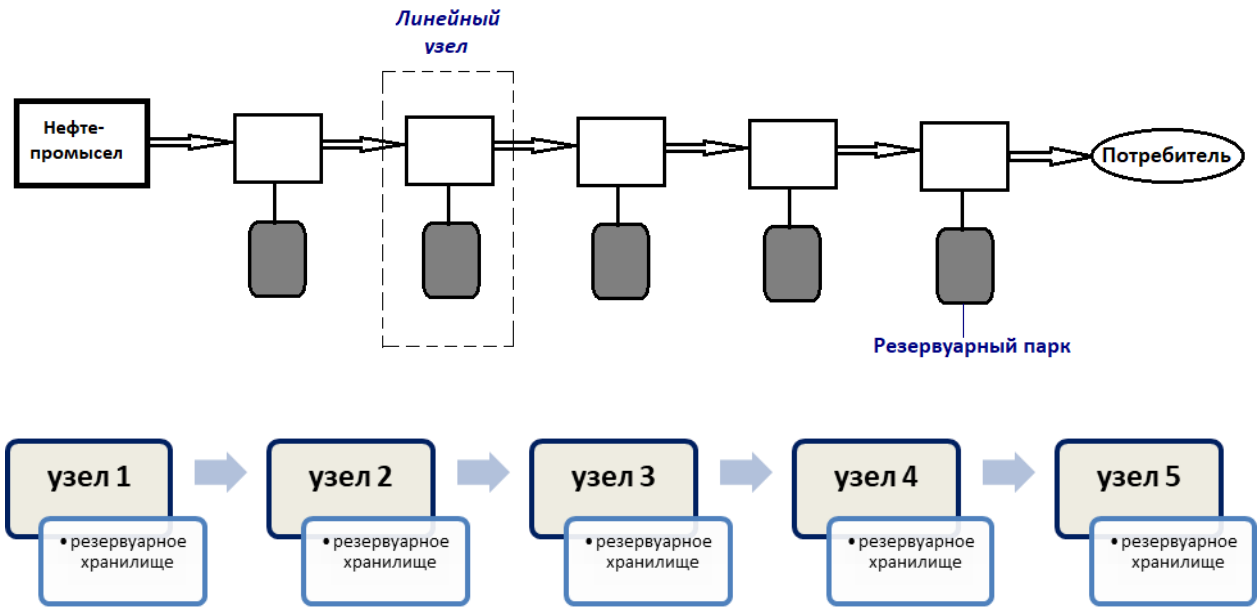


Рисунок 3.1 – Схема однониточного нефтепровода с поэлементными резервуарными парками.

Пусть

λ_i – интенсивность безотказной работы i-ого линейного узла,

μ_i – интенсивность восстановления отказавшего i-ого линейного узла,

h_i – резерв времени i-ого резервуарного парка.

Предполагается, что пополнение резервуарного парка начинается сразу же после восстановления таким образом, что к следующему отказу i-ого линейного узла i-ый резервуарный парк будет полностью заполнен (мгновенно пополняемый резерв времени).

Используя формулы (3.17) – (3.22), представленные в главе 3, получаем расчетные формулы для нахождения стационарных характеристик надежности и эффективности.

$$K_{\Gamma} = \frac{\prod_{i=1}^{N}\left(\lambda_i + \mu_i - \lambda_i e^{-\mu_i h_i}\right)}{\prod_{i=1}^{N}\left(\lambda_i + \mu_i\right)}, \tag{3.22}$$

$$T_{+} = \frac{\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{\lambda_i + \mu_i - \lambda_i e^{-\mu_i h_i}}{\lambda_i \mu_i}\right)}{\sum_{i=1}^{N}\left(e^{-\mu_i h_i}\prod_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{N}\left(\frac{\lambda_k + \mu_k - \lambda_k e^{-\mu_k h_k}}{\lambda_k \mu_k}\right)\right)}, \tag{3.23}$$

$$T_{-} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{e^{-\mu_i h_i}}{\mu_i}\prod_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{N}\left(\frac{\lambda_k + \mu_k - \lambda_k e^{-\mu_k h_k}}{\lambda_k \mu_k}\right)\right) + \prod_{i=1}^{N}\frac{e^{-\mu_i h_i}}{\mu_i}}{\sum_{i=1}^{N}\left(e^{-\mu_i h_i}\prod_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{N}\left(\frac{\lambda_k + \mu_k - \lambda_k e^{-\mu_k h_k}}{\lambda_k \mu_k}\right)\right)}, \tag{3.24}$$

$$S = \frac{c_1\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{\lambda_i + \mu_i - \lambda_i e^{-\mu_i h_i}}{\lambda_i \mu_i}\right) - c_2\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{e^{-\mu_i h_i}}{\mu_i}\prod_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{N}\left(\frac{\lambda_k + \mu_k - \lambda_k e^{-\mu_k h_k}}{\lambda_k \mu_k}\right)\right) + \prod_{i=1}^{N}\frac{e^{-\mu_i h_i}}{\mu_i}\right]}{\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{\lambda_i + \mu_i}{\lambda_i \mu_i}\right)}, \tag{3.25}$$

$$C = \frac{c_2\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{e^{-\mu_i h_i}}{\mu_i}\prod_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{N}\left(\frac{\lambda_k + \mu_k - \lambda_k e^{-\mu_k h_k}}{\lambda_k \mu_k}\right)\right) + \prod_{i=1}^{N}\frac{e^{-\mu_i h_i}}{\mu_i}\right]}{\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{\lambda_i + \mu_i - \lambda_i e^{-\mu_i h_i}}{\lambda_i \mu_i}\right)}. \tag{3.26}$$

Стоит отметить, что в монографии [52] были получены только количественные характеристики системы (коэффициент готовности, вероятность

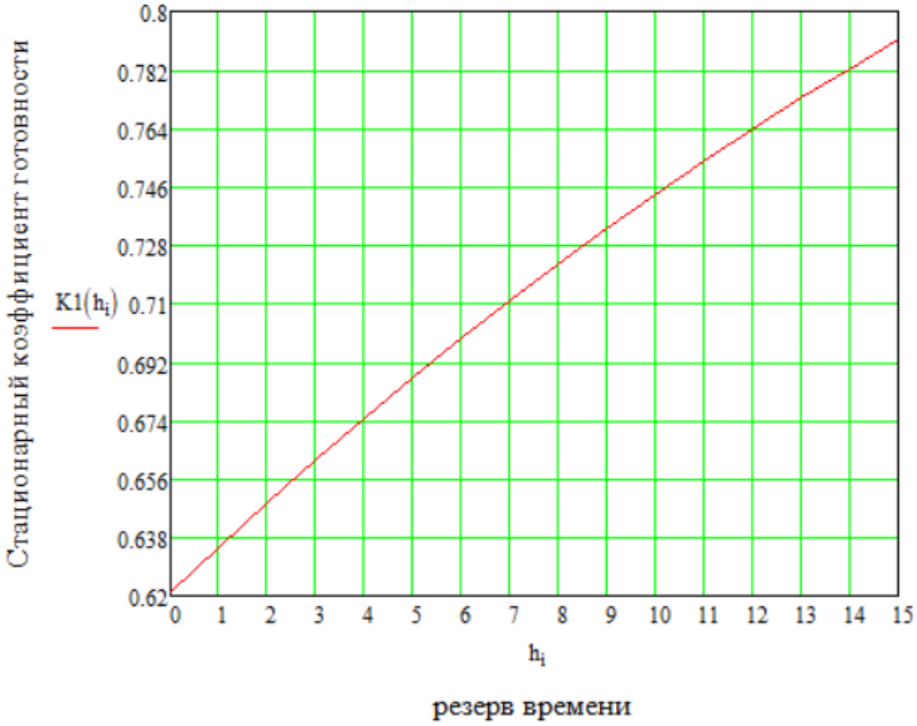
безотказной работы и средняя наработка на отказ). Здесь же вычислены также временные характеристики (средняя стационарная наработка системы на отказ и среднее стационарное время восстановления системы) и экономические характеристики (средняя удельная прибыль в единицу календарного времени и средние удельные затраты в единицу времени исправного функционирования). Также формулы (3.17) – (3.22) позволяют находить характеристики надежности и эффективности систем с поэлементным резервом времени в случае, когда случайные величины, описывающие функционирование системы, имеют распределения произвольного вида.

Пример 1. Рассмотрим случай, когда N=5. Каждый линейный узел имеет поэлементный неслучайный резерв времени. Величина резерва времени – это время, в течение которого полностью расходуется емкость резервуарного парка, в случае отказа ЛУ. Резерв времени изменяется от 0 до 15 часов с шагом 1 час. Время безотказной работы первого линейного узла (ЛУ) $M\alpha_1$=200 часов (λ_1=0,005), второго ЛУ $M\alpha_2$=181,82 часа (λ_2=0,0055), третьего ЛУ $M\alpha_3$=250 часов (λ_3=0,004), четвертого ЛУ $M\alpha_4$=222,22 часа (λ_4=0,0045), пятого ЛУ $M\alpha_5$=250 часов (λ_5=0,004); время восстановления первого ЛУ $M\beta_1$=20 часов (μ_1=0,05), второго ЛУ $M\beta_2$=18,18 часов (μ_2=0,055), третьего ЛУ $M\beta_3$=25 часов (μ_1=0,04), четвертого ЛУ $M\beta_4$=22,2 часа (μ_4=0,045), пятого ЛУ $M\beta_5$=25 часов (μ_1=0,04); прибыль, получаемая в единицу времени исправного функционирования системы, c_1=200 у.е., потери в единицу времени отказа c_2=250 у.е. Результаты вычислений для рассматриваемой системы представлены в Таблице 3.2. На Рисунке 3.2 изображены: а) стационарный коэффициент готовности, б) средняя стационарная наработка на отказ, в) среднее стационарное время восстановления, г) средняя удельная прибыль, д) средние удельные затраты.

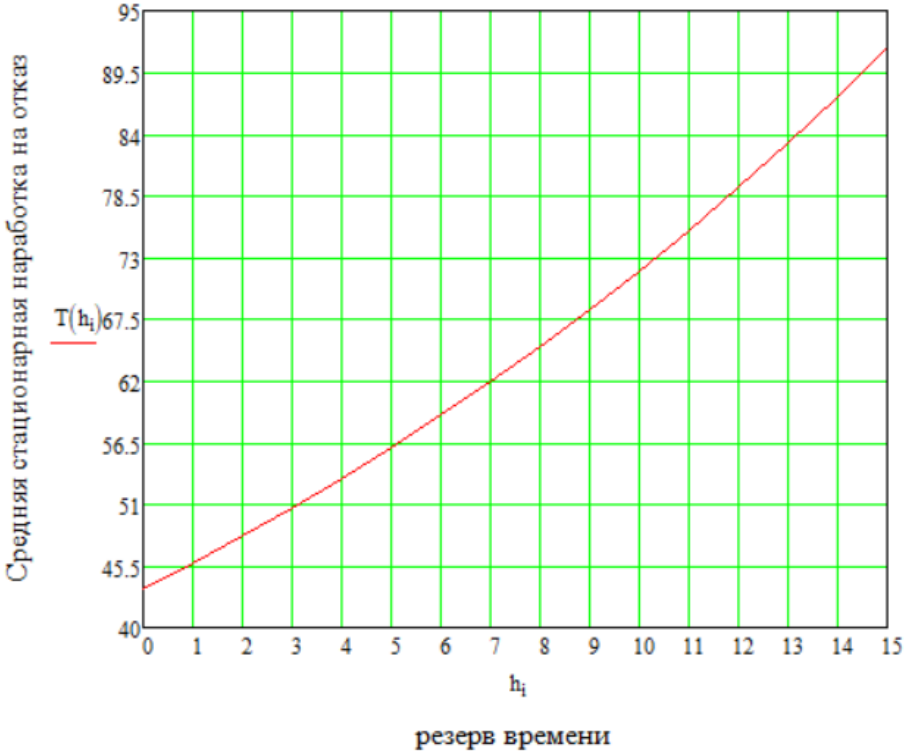
Таблица 3.2.

Влияние резерва времени на характеристики надежности и эффективности

h, ч.	$К_Г$	$Т_+$, ч.	$Т_-$, ч.	S, у.е./ч.	C, у.е./ч.
0	0,621	43,478	26,544	29,415	152,627
1	0,635	45,766	26,306	35,75	143,701
2	0,649	48,160	26,084	41,902	135,403
3	0,662	50,667	25,876	47,872	127,679
4	0,675	53,291	25,682	53,661	120,479
5	0,687	56,038	25,500	59,269	113,761
6	0,699	58,914	25,329	64,699	107,484
7	0,711	61,924	25,170	69,953	101,614
8	0,722	65,075	25,020	75,034	96,118
9	0,733	68,373	24,879	79,943	90,968
10	0,744	71,825	24,747	84,686	86,136
11	0,754	75,438	24,623	89,264	81,60
12	0,764	79,220	24,507	93,682	77,338
13	0,773	83,178	24,398	97,942	73,33
14	0,782	87,320	24,295	102,049	69,558
15	0,791	91,655	24,199	106,007	66,005



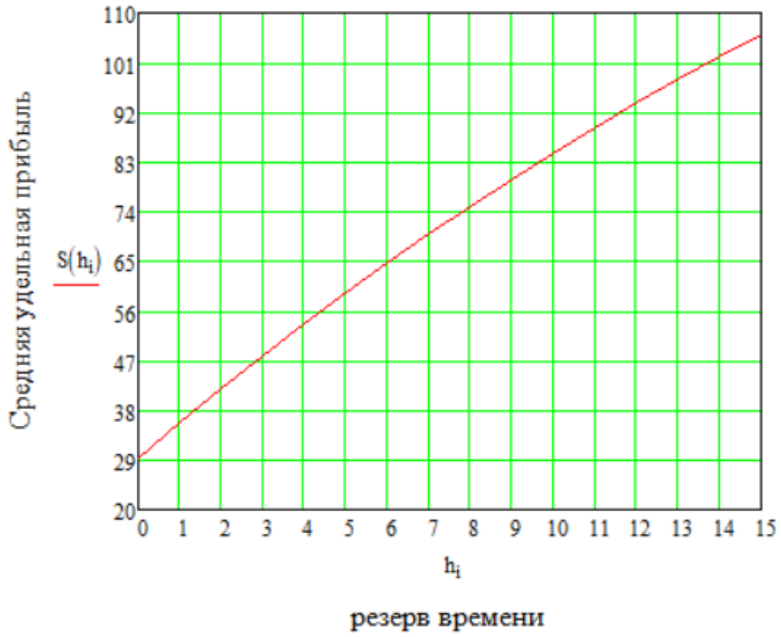
а)


Средняя стационарная наработка на отказ
T(h_i)
95
89.5
84
78.5
73
67.5
62
56.5
51
45.5
40
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
h_i
резерв времени

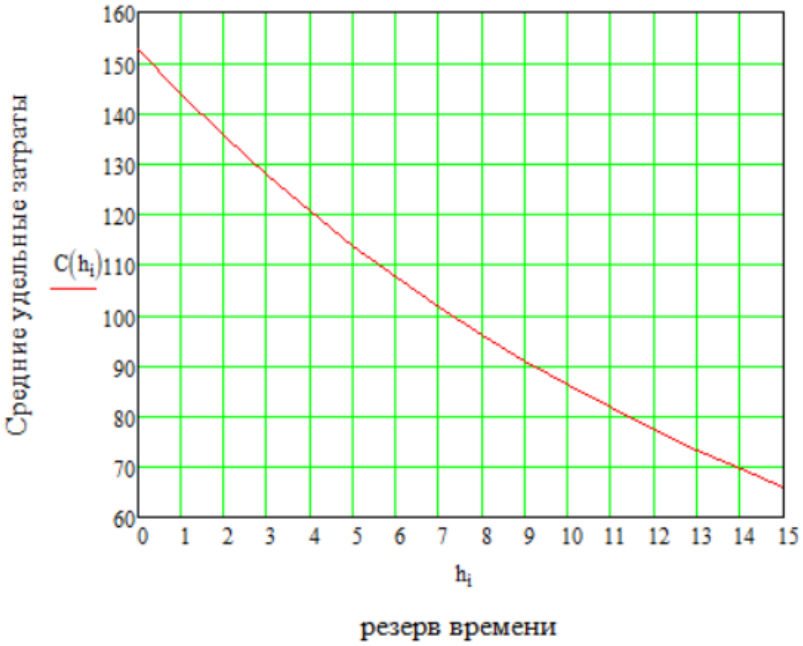
б)


Среднее стационарное время восстановления
N1(h_i)
27
26.7
26.4
26.1
25.8
25.5
25.2
24.9
24.6
24.3
24
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
h_i
резерв времени

в)



г)



д)

Рисунок 3.2 – Характеристики надежности и эффективности

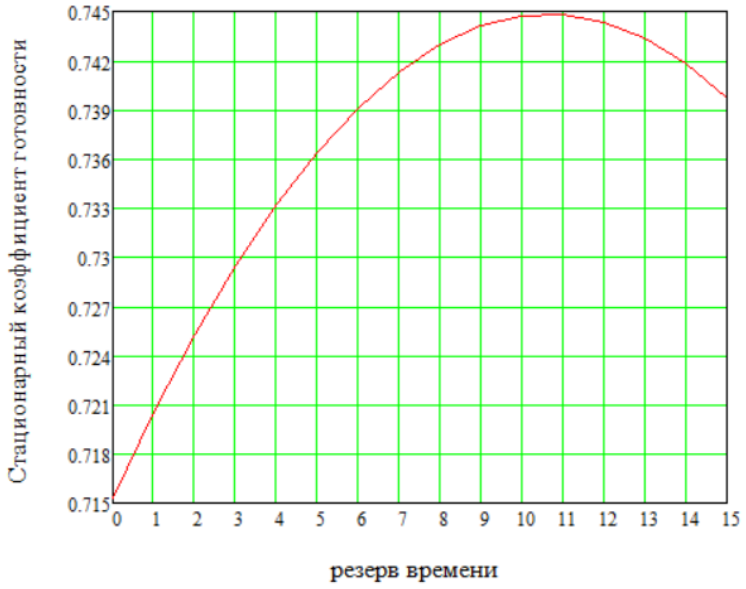
Пример 2. Рассмотрим случай, когда резерв времени первого ЛУ h_1 изменяется от 0 до 15 часов, h_2 – от 15 до 0 ч., h_3 – от 5 до 20 ч., h_4 – от 20 до 5 ч., h_5 – от 3 до 18 часов с шагом 1 час (т.е. поэлементные резервы времени связаны условиями: h_1=i, h_2=15-i, h_3=i+5, h_4=20-i, h_5=i+3, i=0…15 ч.). Прибыль, получаемая в единицу времени исправного функционирования системы, c_1=150 у.е., потери в единицу времени отказа c_2=250 у.е. Остальные значения совпадают с примером 1.

Результаты вычислений для рассматриваемой системы представлены в Таблице 3.3 и на Рисунке 3.3.

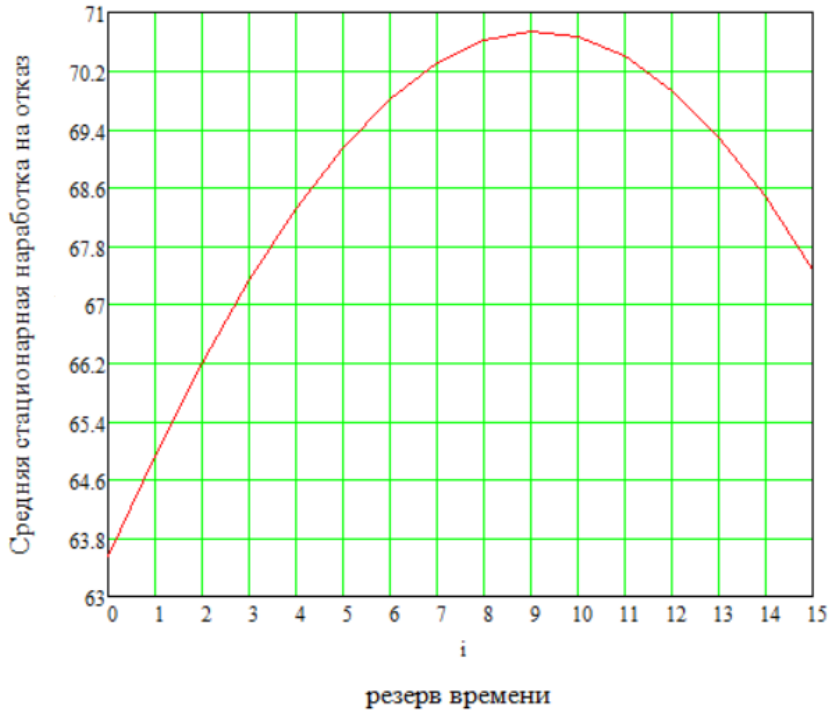
Таблица 3.3.

Влияние резерва времени на характеристики надежности и эффективности

h_1, ч.	**h_2, ч.**	**h_3, ч.**	**h_4, ч.**	**h_5, ч.**	**$K_Г$**	**T_+, ч.**	**T_-, ч.**	**S, у.е./ч.**	**C, у.е./ч.**
0	15	5	20	3	0,715	63,557	25,295	36,124	99,498
1	14	6	19	4	0,721	64,938	25,182	38,229	96,946
2	13	7	18	5	0,725	66,201	25,070	40,129	94,675
3	12	8	17	6	0,730	67,332	24,960	41,823	92,674
4	11	9	16	7	0,733	68,320	24,850	43,311	90,935
5	10	10	15	8	0,736	69,151	24,742	44,594	89,450
6	9	11	14	9	0,739	69,817	24,635	45,670	88,215
7	8	12	13	10	0,741	70,307	24,529	46,540	87,223
8	7	13	12	11	0,743	70,614	24,425	47,201	86,473
9	6	14	11	12	0,744	70,733	24,321	47,653	85,962
10	**5**	**15**	**10**	**13**	**0,745**	**70,660**	**24,219**	**47,894**	**85,690**
11	**4**	**16**	**9**	**14**	**0,745**	**70,395**	**24,119**	**47,923**	**85,657**
12	3	17	8	15	0,744	69,939	24,021	47,738	85,865
13	2	18	7	16	0,743	69,295	23,926	47,337	86,319
14	1	19	6	17	0,742	68,470	23,834	46,717	87,022
15	0	20	5	18	0,740	67,471	23,745	45,875	87,981



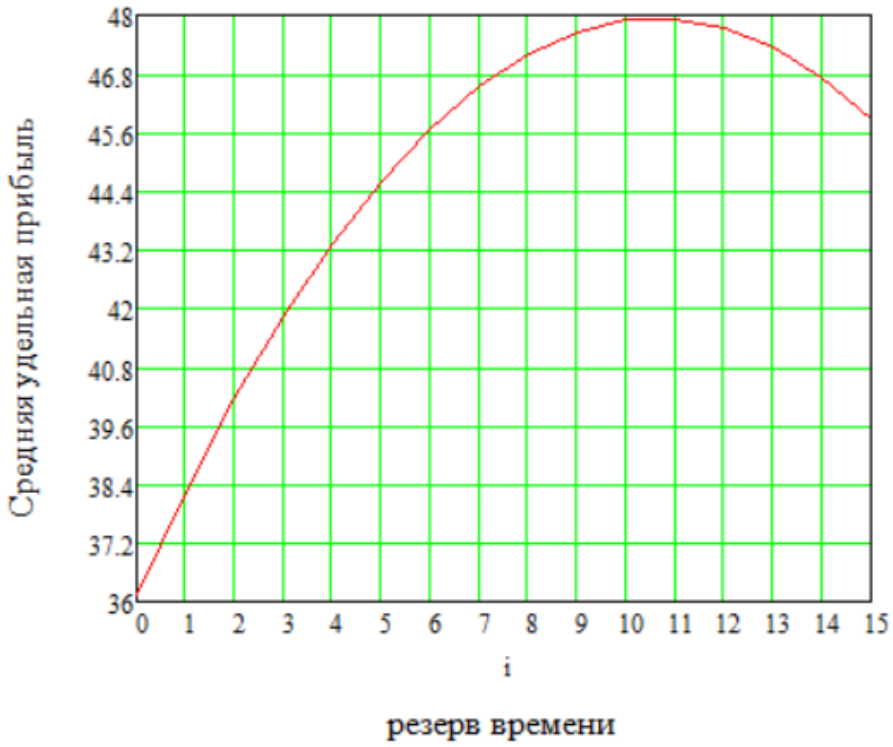
а)


Средняя стационарная наработка на отказ
71
70.2
69.4
68.6
67.8
67
66.2
65.4
64.6
63.8
63
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
i
резерв времени

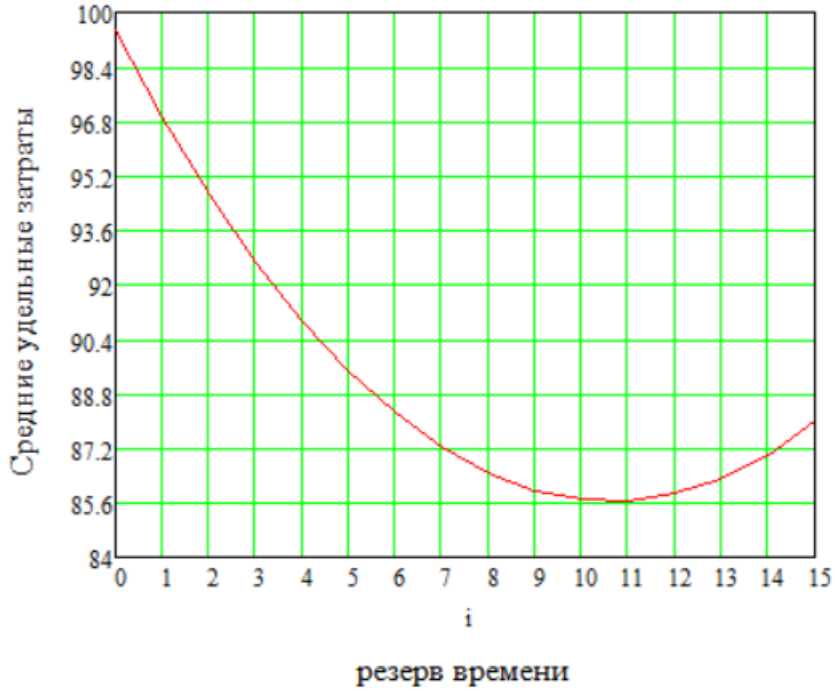
б)


Среднее стационарное время восстановления
25.4
25.22
25.04
24.86
24.68
24.5
24.32
24.14
23.96
23.78
23.6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
i
резерв времени

в)



г)



д)

Рисунок 3.3 – Характеристики надежности и эффективности.

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что при заданном сочетании величин резерва времени наиболее оптимальными являются значения при i=10 и i=11.

Выводы по Главе 3

1. В данной главе решена задача математического описания функционирования многокомпонентной полумарковской системы. Полученные аналитические выражения для многокомпонентных систем с поэлементным резервом времени являются универсальными и могут быть использованы для расчета характеристик надежности и эффективности многокомпонентных полумарковских систем.

2. Получены расчетные формулы для стационарных характеристик надежности и эффективности системы с произвольной структурой. Проведен анализ влияния величины резерва времени на полученные характеристики надежности и эффективности.

3. Полученные выражения позволяют оценить эффективность работы системы и могут использоваться в качестве критерия оптимизации.

4. При отсутствии резерва времени (т.е. равенства 0 РВ у всех элементов), аналитические выражения для стационарных характеристик надежности совпадают с результатами, представленными в монографии [16].

5. Результаты данной главы могут быть использованы для построения полумарковских моделей систем с различными видами и стратегиями использования резерва времени, инженерных расчетов и решения оптимизационных задач, связанных с использованием резерва времени.

6. При технологической переформулировке математической задачи, рассмотренной в параграфе 3.4, ее результаты можно использовать для анализа надежности и эффективности системы газопровода с подземными хранилищами газа, системы водоснабжения с резервуарами на каждом участке, информационной системы с поэлементными хранилищами данных, систем электроэнергетики с поэлементными накопителями энергии.

Глава 4. Скрытые марковские модели систем на основе укрупненных полумарковских моделей систем с резервом времени

В данной главе предлагается методика построения скрытой марковской модели (СММ) систем различного назначения, допускающих построение полумарковской модели.

С использованием алгоритма стационарного фазового укрупнения [18, 20, 101] в параграфах 4.1 и 4.2 построены укрупненные полумарковские модели систем с резервом времени, затем рассматриваются скрытые марковские модели, построенные на основе этих укрупненных моделей. Для полученных СММ на основе заданного вектора сигналов решаются задачи оценивания характеристик ВЦМ укрупнённой модели и прогнозирования её состояний.

В обычной марковской модели переходы между состояниями характеризуют динамику моделируемой системы, и мы неявно предполагаем, что последовательность состояний может наблюдаться непосредственно, и наблюдателю может быть доступна структура и параметры марковской модели. В некоторых областях, таких как распознавание речи, моделирование сетевого траффика, анализ изменения цены акций, полезно удалить такого рода ограничительные допущения и построить модель, в которой наблюдаемый результат является вероятностной функцией основного марковского состояния. Скрытые марковские модели (СММ) являются такими моделями.

СММ – это статические модели, используемые во многих реальных приложениях и задачах. Использование аппарата теории СММ получило широкое распространение в последние десятилетия, что обуславливается большим количеством публикаций и разнообразием сфер применения. Следует отметить, что большинство публикаций зарубежные.

Определение [97]. Марковский процесс $X_t = (S_t, Y_t)$ называется частично наблюдаемым марковским процессом или скрытой Марковской моделью, если его вероятности перехода между состояниями не зависят от Y_{t-1}, то есть:

$$p(x_t \mid x_{t-1}) = p(x_t \mid s_{t-1}) \tag{4.1}$$

или

$$p(s_t, y_t \mid s_{t-1}, y_{t-1}) = p(s_t, y_t \mid s_{t-1}). \tag{4.2}$$

Состояния $S_t \in S$ называются скрытыми состояниями, процесс $\boldsymbol{S} = \left(S_t; t \in T\right)$ – скрытый процесс, а $\boldsymbol{y} = \left(y_t; t \in T\right)$ называется наблюдением.

Следует отметить, что хотя сама СММ является марковской, обычно ненаблюдаемая компонента такой модели сама по себе не является марковской. Таким образом, СММ можно использовать для моделирования немарковского поведения, сохраняя при этом многие математические и вычислительные преимущества марковского свойства.

Зачастую, мы заинтересованы в моделировании наблюдаемых явлений, а не в процессе ненаблюдаемых факторов. Однако, включение этих ненаблюдаемых факторов, позволяет построить модель, которая более точно отражает статистические свойства наблюдаемых явлений. Например, рассмотрим систему с резервом времени. Пусть она состоит из одного элемента и накопителя (резерв времени). В момент выхода элемента из строя (отказ элемента), включается накопитель, и система продолжает функционировать за счет резерва времени. Если элемент успевает восстановиться за резервное время, то накопитель отключается и система продолжает работу в обычном режиме. Если нет – то наступает отказ всей системы. Предположим, что во время наблюдения за функционированием такой системы, мы можем наблюдать только состояние системы: работоспособна или неработоспособна. Очевидно, что для нас останется ненаблюдаемым функционирует ли система за счет резерва времени или в обычном режиме. Поэтому включение в модель ненаблюдаемых (скрытых) факторов позволяет получить более полную информацию о функционировании реальной системы и ее характеристиках.

Заметим, что СММ естественным образом описывает ситуацию, в которой стохастическая система наблюдается посредством измерений с шумом.

СММ получили широкое распространение благодаря возможности учитывать как пространственные, так и временные характеристики последовательностей. Теория скрытых марковский моделей детально представлена в монографии [75, 85], теория скрытых полумарковских моделей – [132, 147], обзоры публикаций по данной тематике представлены в работах [110, 146, 147]. Работы [127, 53, 6] посвящены применению СММ в распознавании речи, моделирование распознания рукописного текста представлено в монографии [24], сигналов [17, 63, 97], [66, 78, 136] – в задачах биоинформатики и биологии, [87] – в исследовании динамических систем, [83, 44] – в энергетике, [73, 111, 149] – в анализе временных рядов, [138] – в статистическом анализе землетрясений, [74, 76, 84, 99, 108, 116] – в надежности и техническом обслуживании, [72, 82, 86, 98, 148, 114, 122] – информационных технологиях.

Описание СММ, постановка и решение основных задач СММ представлены в **Приложении Е**.

Приведем алгоритм построения СММ на основе укрупненной полумарковской модели:

1. Построить полумарковскую модель системы.
2. Применить алгоритм стационарного фазового укрупнения, т.е. определить $\hat{E}$, $\hat{p}_k^r$, $\hat{m}_k$ [18, 20, 101].
3. Определить параметры СММ образом:
   a) $\hat{E}$ – множество состояний модели.
   b) Задать множество сигналов J.
   c) Матрица переходных вероятностей будет состоять из вероятностей $\hat{p}_k^r$.
   d) Задать функцию связи $R(s \mid \boldsymbol{x})$ состояний модели с сигналами.
   e) Задать начальное распределение.

В следующих двух параграфах приведены примеры применения указанного алгоритма для построения СММ систем с резервом времени.

4.1.Скрытая модель системы с поэлементным резервом времени

4.1.1. Укрупнение двухкомпонентной системы из 2.1

Рассмотрим систему S, представленную в разделе 2.1, состоящую из 2-х компонентов, времена безотказной работы которых случайные величины (СВ) α_i с функциями распределения (ФР) $F_i(t)$, а времена восстановления – СВ β_i с ФР $G_i(t)$, $i=1,2$. Каждый компонент системы имеет случайный мгновенно пополняемый резерв времени τ_i с ФР $R_i(t)$. СВ α_i, β_i, τ_i предполагаются независимыми в совокупности, имеющими конечные математические ожидания; ФР $F_i(t)$, $G_i(t)$, $R_i(t)$ – имеющими плотности $f_i(t)$, $g_i(t)$, $r_i(t)$.

Резерв времени компонента начинает использоваться в момент начала восстановления компонента. Отказ системы S наступает тогда, когда оба компонента восстанавливаются и полностью израсходован резерв времени для каждого компонента. Он продолжается до восстановления одного из отказавших компонентов, при этом резерв времени у восстановившегося компонента мгновенно пополняется до уровня τ_i. Эта система является моделью двухкомпонентной информационной системы с покомпонентными накопителями информации.

В разделе 2.1 для построения полумарковской модели системы S используется полумарковский процесс $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний вида:

$$E=\{\, i\bar{d}x : \bar{d}=(d_1,d_2),\ x>0\}, \tag{4.3}$$

где $i=1,2$ – номер компонента, в котором произошло изменение состояния. Координата d_k вектора $\bar{d}$ описывает физическое состояние компонента с номером k:

$$d_k = \begin{cases} 0, \text{ если к}-\text{ый компонент находится в отказе,} \\ 1, \text{ если к}-\text{ый компонент работоспособен,} \\ \overline{1}, \text{ если к}-\text{ый компонент восстанавливается и} \\ \text{функционирует за счет резерва времени,} \end{cases}$$

непрерывная компонента x указывает время, прошедшее с последнего изменения состояния системы.

В разделе 2.1 найдены стационарное распределение ВЦМ и стационарные характеристики надежности рассматриваемой системы.

С целью упрощения модели системы, укрупним построенную в разделе 2.1 полумарковскую модель, используя алгоритм стационарного фазового укрупнения, предложенный в [20, 101].

Фазовое пространство состояний E исходной модели расщепляется на N= 9 классов:

$$E_{00} = \{100x, 200x\},\ E_{11} = \{1,111x, 211x\},\ E_{\overline{1}\overline{1}} = \{1\overline{1}\overline{1}x, 2\overline{1}\overline{1}x\},$$

$$E_{\overline{1}1} = \{1\overline{1}1x, 2\overline{1}1x\},\ E_{1\overline{1}} = \{11\overline{1}x, 21\overline{1}x\},\ E_{10} = \{110x, 210x\},$$

$$E_{01} = \{101x, 201x\},\ E_{0\overline{1}} = \{10\overline{1}x, 20\overline{1}x\},\ E_{\overline{1}0} = \{1\overline{1}0x, 2\overline{1}0x\},$$

каждый из которых «склеивается» в одно состояние укрупненной модели.

Фазовое пространство состояний укрупненной модели имеет вид:

$$\hat{E} = \{00, 11, 1\overline{1}, \overline{1}1, \overline{1}\overline{1}, 10, 01, \overline{1}0, 0\overline{1}\}.$$

Опишем физический смысл, введенных классов состояний:

E_{00} – оба компонента находятся в отказе, резерв времени каждого компонента полностью израсходован;

E_{11} – оба компонента работоспособны;

$E_{\overline{1}\overline{1}}$ – оба компонента восстанавливаются и функционируют за счет резерва времени;

$E_{\overline{1}1}$ – первый компонент восстанавливается и функционирует за счет резерва времени, второй работоспособен;

$E_{1\bar{1}}$ – второй компонент восстанавливается и функционирует за счет резерва времени, первый работоспособен;

E_{10} – первый компонент работоспособен, второй находится в отказе;

E_{01} – второй компонент работоспособен, первый находится в отказе;

$E_{0\bar{1}}$ – первый компонент находится в отказе, второй восстанавливается и функционирует за счет резерва времени;

$E_{\bar{1}0}$ – второй компонент находится в отказе, первый восстанавливается и функционирует за счет резерва времени.

Определим вероятности перехода ВЦМ $\hat{p}_k^r$ и средние времена пребывания в состояниях $\hat{m}_k$ укрупненной модели, которые согласно [20, 101] находятся по формулам (2.30).

Используя формулу (2.30), найдем вероятности перехода ВЦМ укрупненной модели, которые будут использованы при построении скрытой марковской модели:

$$P_{00}^{01} = \frac{M\left([\beta_1 - \tau_1]^+\right)}{M\left([\beta_1 - \tau_1]^+\right) + M\left([\beta_2 - \tau_2]^+\right)}, \quad P_{00}^{10} = \frac{M\left([\beta_2 - \tau_2]^+\right)}{M\left([\beta_1 - \tau_1]^+\right) + M\left([\beta_2 - \tau_2]^+\right)},$$

$$P_{11}^{\bar{1}1} = \frac{M\alpha_2}{M\alpha_1 + M\alpha_2}, \quad P_{11}^{1\bar{1}} = \frac{M\alpha_1}{M\alpha_1 + M\alpha_2}, \quad P_{\bar{1}\bar{1}}^{\bar{1}0} = \frac{p_2 M(\beta_1 \wedge \tau_1)}{M(\beta_1 \wedge \tau_1) + M(\beta_2 \wedge \tau_2)},$$

$$P_{\bar{1}\bar{1}}^{0\bar{1}} = \frac{p_1 M(\beta_2 \wedge \tau_2)}{M(\beta_1 \wedge \tau_1) + M(\beta_2 \wedge \tau_2)}, \quad P_{\bar{1}\bar{1}}^{\bar{1}1} = \frac{(1-p_2) M(\beta_1 \wedge \tau_1)}{M(\beta_1 \wedge \tau_1) + M(\beta_2 \wedge \tau_2)},$$

$$P_{\bar{1}\bar{1}}^{1\bar{1}} = \frac{(1-p_1) M(\beta_2 \wedge \tau_2)}{M(\beta_1 \wedge \tau_1) + M(\beta_2 \wedge \tau_2)}, \quad P_{\bar{1}1}^{11} = \frac{(1-p_1) M\alpha_2}{M\alpha_2 + M(\beta_1 \wedge \tau_1)}, \quad P_{\bar{1}1}^{\bar{1}\bar{1}} = \frac{M(\beta_1 \wedge \tau_1)}{M\alpha_2 + M(\beta_1 \wedge \tau_1)},$$

$$P_{\bar{1}1}^{01} = \frac{p_1 M\alpha_2}{M\alpha_2 + M(\beta_1 \wedge \tau_1)}, \quad P_{1\bar{1}}^{11} = \frac{(1-p_2) M\alpha_1}{M\alpha_1 + M(\beta_2 \wedge \tau_2)}, \quad P_{1\bar{1}}^{\bar{1}\bar{1}} = \frac{M(\beta_2 \wedge \tau_2)}{M\alpha_1 + M(\beta_2 \wedge \tau_2)},$$

$$P_{1\bar{1}}^{10} = \frac{p_2 M\alpha_1}{M\alpha_1 + M(\beta_2 \wedge \tau_2)}, \quad P_{10}^{11} = \frac{M\alpha_1}{M\alpha_1 + M\left([\beta_2 - \tau_2]^+\right)}, \quad P_{10}^{\bar{1}0} = \frac{M\left([\beta_2 - \tau_2]^+\right)}{M\alpha_1 + M\left([\beta_2 - \tau_2]^+\right)},$$

$$P_{01}^{11}=\frac{M\alpha_2}{M\alpha_2+M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)},\quad P_{01}^{0\bar{1}}=\frac{M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)}{M\alpha_2+M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)},$$

$$P_{0\bar{1}}^{00}=\frac{p_2M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)}{M(\beta_2\wedge\tau_2)+M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)},\quad P_{0\bar{1}}^{1\bar{1}}=\frac{M(\beta_2\wedge\tau_2)}{M(\beta_2\wedge\tau_2)+M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)},$$

$$P_{0\bar{1}}^{01}=\frac{(1-p_2)M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)}{M(\beta_2\wedge\tau_2)+M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)},\quad P_{\bar{1}0}^{00}=\frac{p_1M\left([\beta_2-\tau_2]^+\right)}{M(\beta_1\wedge\tau_1)+M\left([\beta_2-\tau_2]^+\right)},$$

$$P_{\bar{1}0}^{\bar{1}1}=\frac{M(\beta_1\wedge\tau_1)}{M(\beta_1\wedge\tau_1)+M\left([\beta_2-\tau_2]^+\right)},\quad P_{\bar{1}0}^{10}=\frac{(1-p_1)M\left([\beta_2-\tau_2]^+\right)}{M(\beta_1\wedge\tau_1)+M\left([\beta_2-\tau_2]^+\right)},\qquad(4.4)$$

где $[\beta_i-\tau_i]^+$ – СВ с распределением $P\{[\beta_i-\tau_i]^+>t\}=\dfrac{\int_0^\infty r_i(z)\bar{G}_i(t+z)dz}{P(\beta_i>\tau_i)}$, $\wedge$ – знак минимума, $\bar{G}_i(t)=1-G_i(t)$, $p_i=P(\beta_i>\tau_i)=\int_0^\infty\bar{G}_i(t)r_i(t)dt$, $M(\beta_i\wedge\tau_i)=\int_0^\infty\bar{G}_i(t)\bar{R}_i(t)dt$, $M([\beta_i-\tau_i]^+)=\dfrac{\int_0^\infty\bar{G}_i(t)R_i(t)dt}{P(\beta_i>\tau_i)}$.

Используя формулу (2.30), найдем средние времена пребывания в состояниях укрупненной модели:

$$m_{00}=\frac{M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)M\left([\beta_2-\tau_2]^+\right)}{M\left([\beta_1-\tau_1]^+\right)+M\left([\beta_2-\tau_2]^+\right)},\quad m_{11}=\frac{M\alpha_1M\alpha_2}{M\alpha_1+M\alpha_2},$$

$$m_{\bar{1}\bar{1}}=\frac{M(\beta_1\wedge\tau_1)M(\beta_2\wedge\tau_2)}{M(\beta_1\wedge\tau_1)+M(\beta_2\wedge\tau_2)},\quad m_{\bar{1}1}=\frac{M\alpha_2M(\beta_1\wedge\tau_1)}{M\alpha_2+M(\beta_1\wedge\tau_1)},$$

$$m_{1\bar{1}}=\frac{M\alpha_1M(\beta_2\wedge\tau_2)}{M\alpha_1+M(\beta_2\wedge\tau_2)},\quad m_{10}=\frac{M\alpha_1M\left([\beta_2-\tau_2]^+\right)}{M\alpha_1+M\left([\beta_2-\tau_2]^+\right)},$$

$$m_{01} = \frac{M\alpha_2 M\left([\beta_1 - \tau_1]^+\right)}{M\alpha_2 + M\left([\beta_1 - \tau_1]^+\right)}, \quad m_{0\bar{1}} = \frac{M(\beta_2 \wedge \tau_2) M\left([\beta_1 - \tau_1]^+\right)}{M(\beta_2 \wedge \tau_2) + M\left([\beta_1 - \tau_1]^+\right)},$$

$$m_{\bar{1}0} = \frac{M(\beta_1 \wedge \tau_1) M\left([\beta_2 - \tau_2]^+\right)}{M(\beta_1 \wedge \tau_1) + M\left([\beta_2 - \tau_2]^+\right)}. \tag{4.5}$$

Отметим, что формулы (4.4) – (4.5) инвариантны относительно законов распределения СВ α_1, α_2.

Ниже укрупненная полумарковская модель используется для построения скрытой марковской модели.

4.1.2. Скрытая марковская модель на основе укрупнённой полумарковской модели

Пусть $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ – ВЦМ укрупнённой модели, вероятности переходов которой определяются формулами (4.4).

Предположим, что при функционировании системы S состояния ВЦМ укрупненной модели не наблюдаются (скрытые состояния), а наблюдается только количество работоспособных компонентов системы в момент перехода системы в новое состояние.

Следовательно, множество сигналов имеет вид:

$$J = \{0, 1, 2\}.$$

Рассмотрим связь между состояниями ВЦМ укрупненной системы и сигналами, т.е. определим функцию $R(s \mid \boldsymbol{x})$ [128]:

$$R(s \mid \boldsymbol{x}) = P(S_n = s \mid X_n = \boldsymbol{x}), \ \boldsymbol{x} \in \hat{E}, \ s \in J, \ \sum_{s \in J} R(s \mid \boldsymbol{x}) = 1, \tag{4.6}$$

где S_n – n-ый сигнал.

Функция $R(s \mid \boldsymbol{x})$ связи состояний ВЦМ укрупненной модели с сигналами представлена в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Функция связи $R(s \mid x)$ состояний ВЦМ укрупненной модели с сигналами

Состояние, x / Сигнал, s	00	11	$\bar{1}\bar{1}$	$\bar{1}1$	$1\bar{1}$	10	01	$0\bar{1}$	$\bar{1}0$
s=0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
s=1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
s=2	0	1	1	1	1	0	0	0	0

4.1.3. Решение задач теории скрытых марковских моделей

Следуя [127, 128], рассмотрим основные задачи теории скрытых марковских моделей, применительно к построенной скрытой марковской модели.

Пусть $\bar{S}^n = (S_1, S_2, ..., S_n)$ – случайный вектор первых n сигналов. Для заданного вектора сигналов $\bar{s}_n = (s_1, s_2, ..., s_n)$ пусть $\bar{s}_k = (s_1, s_2, ..., s_k)$, $k \le n$. Требуется оценить характеристики ВЦМ укрупненной (скрытой) модели на основе вектора сигналов $\bar{s}_n$. Предполагается, что в начальный момент времени модель находится в состоянии 11.

Введем функции $F_k(i)$ [128]:

$$F_k(i) = P(\bar{S}^k = \bar{s}_k, X_k = i), \; k = 1, 2, ..., n, \tag{4.7}$$

которые называются прямыми переменными [128, 127]. Для этих функций справедлива следующая рекуррентная формула [128]:

$$F_k(i) = R(s_k \mid i) \sum_j F_{k-1}(j) P_j^i, \quad F_1(i) = R(s_1 \mid i) p_i, \tag{4.8}$$

где P_j^i – вероятности перехода ВЦМ укрупнённой модели, определённые формулами (4.4), (p_i) – распределение начального состояния ВЦМ.

Используя формулу (4.8), найдём три первые функции $F_k(i)$:

$$F_1(i)=\begin{cases}0, \ i\neq 11,\\ R(s_1\,|\,11), i=11,\end{cases} \qquad F_2(i)=\begin{cases}0, \ i\neq \bar{1}1, i\neq 1\bar{1},\\ R(s_2\,|\,1\bar{1})R(s_1\,|\,11)P_{11}^{1\bar{1}}, i=1\bar{1},\\ R(s_2\,|\,\bar{1}1)R(s_1\,|\,11)P_{11}^{\bar{1}1}, i=\bar{1}1,\end{cases}$$

$$F_3(i)=\begin{cases}R(s_3\,|\,11)\left[R(s_2\,|\,1\bar{1})R(s_1\,|\,11)P_{11}^{1\bar{1}}P_{1\bar{1}}^{11}+R(s_2\,|\,\bar{1}1)R(s_1\,|\,11)P_{11}^{\bar{1}1}P_{\bar{1}1}^{11}\right], \ i=11,\\ R(s_3\,|\,10)R(s_2\,|\,1\bar{1})R(s_1\,|\,11)P_{11}^{1\bar{1}}P_{1\bar{1}}^{10}, \ i=10,\\ R(s_3\,|\,01)R(s_2\,|\,\bar{1}1)R(s_1\,|\,11)P_{11}^{\bar{1}1}P_{\bar{1}1}^{01}, \ i=01,\\ R(s_3\,|\,\bar{1}\bar{1})\left[R(s_2\,|\,1\bar{1})R(s_1\,|\,11)P_{11}^{1\bar{1}}P_{1\bar{1}}^{\bar{1}\bar{1}}+R(s_2\,|\,\bar{1}1)R(s_1\,|\,11)P_{11}^{\bar{1}1}P_{\bar{1}1}^{\bar{1}\bar{1}}\right], \ i=\bar{1}\bar{1},\\ 0, \text{ для остальных состояний.}\end{cases}$$

Функции $F_4(i), F_5(i),...$ находятся аналогично, используя рекуррентную формулу (4.8).

Другими функциями, используемыми при нахождении оценок характеристик скрытой модели, являются функции $B_k(i)$, которые называются обратными переменными [128, 127]:

$$B_k(i)=P(S_{k=1}=s_{k=1},...,S_n=s_n\,|\,X_k=i), \ k=\overline{1,n-1},$$

для которых имеет место рекуррентная формула [128]:

$$B_k(i)=\sum_j R(s_{k+1}\,|\,j)B_{k+1}(j)P_i^j, \ B_{n-1}(i)=\sum_j P_i^j R(s_n\,|\,j). \tag{4.9}$$

Для вероятности $P\left(S^n=s_n\right)$ справедливы формулы [127]:

$$P\left(\bar{S}^n=\bar{s}_n\right)=\sum_i F_n(i)=\sum_i R(s_1\,|\,i)B_1(i)p_i, \tag{4.10}$$

а также [128]

$$P(\bar{S}^n=\bar{s}_n)=\sum_i F_k(i)B_k(i), \tag{4.11}$$

при любом фиксированном *k*.

В качестве примера оценок характеристик скрытой укрупненной модели рассмотрим систему *S*, у которой средние времена безотказной работы компонентов K_1 и K_2 соответственно равны $M\alpha_1$ = 8,33 ч., $M\alpha_2$ = 6,25 ч.; СВ β_1,

β_2 имеют распределение Эрланга 5-го порядка, $M\beta_1$ = 0,71 ч., $M\beta_2$ = 0,83 ч. Компонент κ_i имеет неслучайный резерв времени, равный h_i (т.е. $R_i(t) = 1(t - h_i)$), h_1=0,5 ч., h_2=0,4 ч.

Пусть задан вектор сигналов (2, 2, 1, 1, 0, 1, 1) (n=7). Рассмотрим следующие задачи по оценке характеристик скрытой модели.

1. Определим вероятности состояний скрытой модели в момент испускания 7-го сигнала. Воспользуемся формулой [128]:

$$P\left(X_n = i \mid \overline{S}^n = \overline{s}_n\right) = \frac{F_n(i)}{\sum_j F_n(j)}. \tag{4.12}$$

Тогда на 7-м шаге модель находилась в состоянии $0\overline{1}$ с вероятностью 0,3991 и в состоянии $\overline{1}0$ с вероятность 0,6009. Для остальных состояний эта вероятность равна нулю.

2. Найдём вероятности, с которыми скрытая модель осуществит переход в состояния на следующем шаге. Для этого воспользуемся формулой [128]:

$$P(X_{n+1} = j \mid \overline{s}_n) = \sum_i P(X_n = i \mid \overline{s}_n) P_i^j, \tag{4.13}$$

при этом используется формула (4.11).

Получаем следующие вероятности перехода скрытой модели на 8-м шаге: в состояние 00 с вероятностью 0,3924; в состояние 11 – 0; в состояние $\overline{1}\overline{1}$ – 0; в состояние $\overline{1}1$ – 0,2928; в состояние $1\overline{1}$ – 0,2123; в состояние 10 – 0,0846; в состояние 01 – 0,0179; в состояние $0\overline{1}$ – 0; $\overline{1}0$ – 0.

3. Определим вероятности появления сигналов на следующем шаге, применим формулу [128]:

$$P(S_{n+1} = s_{n+1} \mid \overline{s}_n) = \sum_i P(X_{n+1} = i \mid \overline{s}_n) R\left(s_{n+1} \mid i\right), \tag{4.14}$$

при этом используется формула (4.13).

Получаем, что вероятность появления сигнала 2 на 8-м шаге равна 0,5050; сигнала 1 – 0,1025; сигнала 0 – 0,3925.

4.Найдем вероятность появления (испускания) заданного вектора сигналов.

Для этого можно использовать формулы (4.11) – (4.12).

Вероятность появления заданного вектора сигналов (2, 2, 1, 1, 0, 1, 1) равна 0,0009.

В Таблице 4.2 представлена вероятность появления заданного вектора сигналов в зависимости от величины резерва времени.

Таблица 4.2

Вероятность появления заданного вектора сигналов при различном резерве времени

h_1	h_2	$P(\overline{S}^n = \overline{s}_n)$
0	0	0,0092
0	0,7	0,0022
0,1	0,4	0,0032
0,1	0,6	0,0020
0,2	0,2	0,0039
0,3	0,2	0,0030
0,3	0,5	0,0013
0,4	0,4	0,0012
0,5	0,2	0,0017
0,5	0,4	0,0009
0,6	0,6	0,0003
0,7	0	0,0017
0,7	0,8	0,0001

Из Таблицы 4.2 видно, что при увеличении резерва времени вероятность появления заданного вектора сигналов уменьшается, что объясняется тем, что вектор сигналов содержит сигнал 0 (оба элемента находятся в отказе).

5. Прогнозирование состояний скрытой модели по заданному вектору сигналов.

На основании заданного вектора сигналов (2, 2, 1, 1, 0, 1, 1) необходимо найти наиболее вероятные состояния скрытой модели на первых 7-и переходах модели. Для решения этой задачи используется формула [128]:

$$P\left(X_k = i \mid \overline{S}^k = \overline{s}_k\right) = \frac{F_k(i)B_k(i)}{\sum_j F_k(j)B_k(j)}. \tag{4.15}$$

Таким образом, необходимо найти i, которое максимизирует выражение $F_k(i)B_k(i)$.

В Таблице 4.3 указаны наиболее вероятные состояния скрытой модели на каждом переходе и вероятности этих состояний.

Таблица 4.3

Наиболее вероятные состояния скрытой модели на переходах

Номер перехода	1	2	3	4	5	6	7
Наиболее вероятное состояние	11	$1\overline{1}$	10	$\overline{1}0$	00	10	$\overline{1}0$
Вероятность состояния	1	0,6139	0,6139	0,6139	1	0,6009	0,6009

Для нахождения наиболее вероятной цепочки состояний использовался алгоритм Витерби [137, 128, 127, 97]. Использование этого алгоритма показывает, что наиболее вероятной является цепочка состояний (11, $1\overline{1}$, 10, $\overline{1}0$, 00, 10, $\overline{1}0$).

На Рисунке 4.1 изображена решетчатая диаграмма функционирования укрупнённой модели, на которой для простоты используется следующая перекодировка состояний модели: $00 \leftrightarrow 1$, $11 \leftrightarrow 2$, $\overline{1}\overline{1} \leftrightarrow 3$, $\overline{1}1 \leftrightarrow 4$, $1\overline{1} \leftrightarrow 5$, $10 \leftrightarrow 6$, $01 \leftrightarrow 7$, $0\overline{1} \leftrightarrow 8$, $\overline{1}0 \leftrightarrow 9$. Жирной линией выделена наиболее вероятная цепочка состояний.

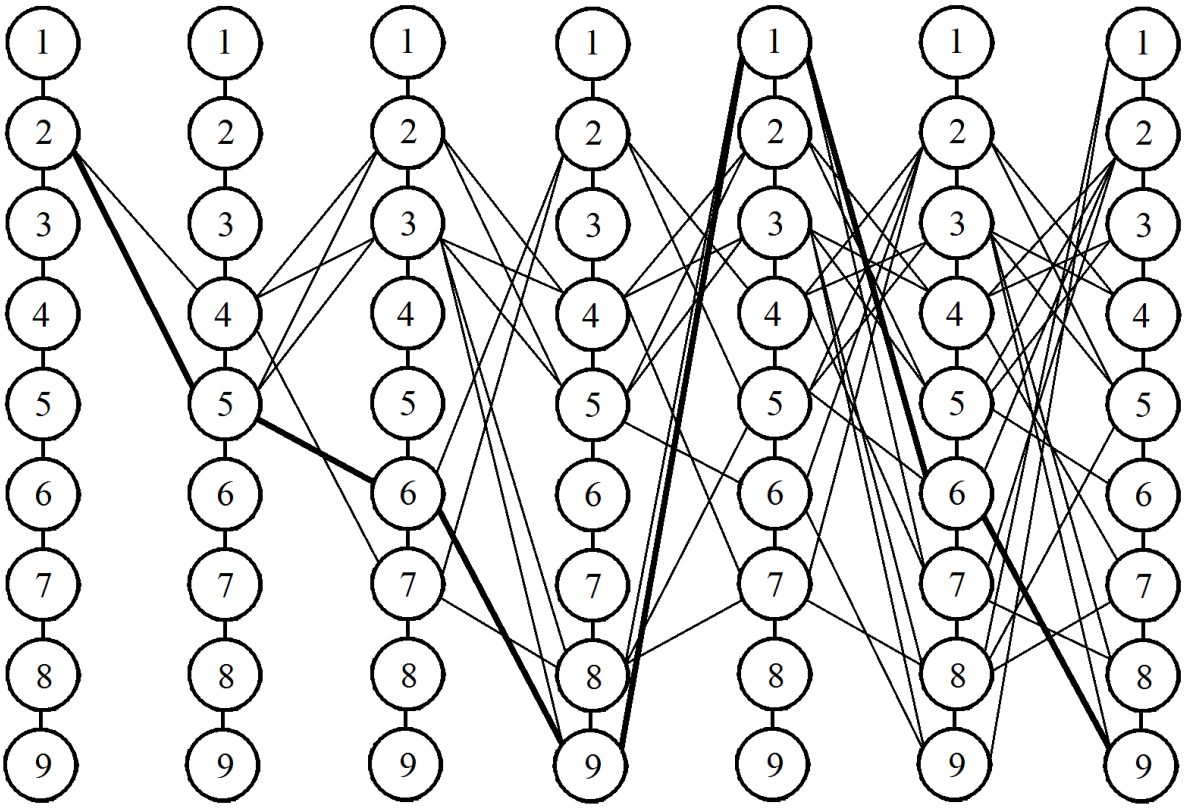


Рисунок 4.1 – Решетчатая диаграмма

Используя алгоритм Баума-Велша [68, 127, 97], можно подобрать параметры скрытой модели (провести обучение), чтобы она наиболее точно соответствовала заданному вектору сигналов.

4.2. Скрытая модель системы с групповым мгновенно пополняемым резервом времени

В монографии [15] построена полумарковская модель системы с групповым мгновенно пополняемым резервом времени. В данном параграфе сначала строится укрупнённая полумарковская модель этой системы (для случая N=2), используя алгоритм стационарного фазового укрупнения [20, 101]. На основе укрупнённой модели строится скрытая марковская модель (СММ) двухкомпонентной системы с групповым мгновенно пополняемым резервом времени. Построенная СММ используется для оценки характеристик и

прогнозирования состояний укрупнённой модели на основе полученного вектора сигналов.

4.2.1. Построение укрупнённой полумарковской модели

Опишем, следуя [15, 118], полумарковскую модель системы с групповым мгновенно пополняемым резервом времени. Рассмотрим систему S (случай $N=2$), состоящую из элементов K_i, времена безотказной работы которых случайные величины (СВ) α_i с функциями распределения (ФР) $F_i(t)$, а времена восстановления элементов – СВ β_i с ФР $G_i(t)$, $i=1,2$. СВ α_i, β_i, предполагаются независимыми в совокупности, имеющими конечные математические ожидания; ФР $F_i(t)$ и $G_i(t)$, имеющими конечные плотности $f_i(t)$ и $g_i(t)$. Система становится неисправной, если отказали $p=2=N$ элементов системы (параллельное соединение) Отказ системы S наступает тогда, когда неисправность длится время, большее чем $h>0$ (h – величина группового мгновенно пополняемого резерва времени) и продолжается до восстановления одного из отказавших элементов; при этом резерв времени становится равным h.

Для построения полумарковской модели системы S в монографии [15] используется полумарковский процесс $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний E [18, 20, 15, 113]:

$$\begin{aligned} E=\{&1110x_2, 211x_10, 1010x_2, 201x_10, 1100x_2,\\ &210x_10, 1000x_2, 200x_10, 1\overline{00}0x_2, 2\overline{00}x_10\}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

где x_k указывает время до очередного отказа или восстановления элемента с номером k.

Рассмотрим содержательный смысл кодов состояний:

- $1110x_2$ – элемент K_1 восстановился, K_2 продолжает работу, $x_2>0$ – время до отказа элемента K_2;

- $211x_10$ – элемент K_2 восстановился, K_1 продолжает работу, $x_1 > 0$ – время до отказа элемента K_1;
- $1010x_2$ – элемент K_1 отказал, K_2 продолжает работу, $x_2 > 0$ – время до отказа элемента K_2;
- $201x_10$ – элемент K_2 восстановился и начал работать, K_1 продолжает восстановление, $x_1 > 0$ – время до восстановления элемента K_1;
- $1100x_2$ – элемент K_1 восстановился и начал работать, K_2 продолжает восстановление, $x_2 > 0$ – время до восстановления элемента K_2;
- $210x_10$ – элемент K_2 отказал, K_1 продолжает работу, $x_1 > 0$ – время до отказа элемента K_1;
- $1000x_2$ – элемент K_1 отказал, K_2 восстанавливается, система функционирует за счет резерва времени, $x_2 > 0$ – время до восстановления элемента K_2;
- $200x_10$ – элемент K_2 отказал, K_1 восстанавливается, система функционирует за счет резерва времени, $x_1 > 0$ – время до восстановления элемента K_1;
- $1\overline{0}\overline{0}0x_2$ – время восстановление элементов K_1 и K_2 превысило величину резерва времени h, система в отказе, $x_2 > 0$ – время до восстановления элемента K_2;
- $2\overline{0}\overline{0}x_10$ – время восстановление элементов K_1 и K_2 превысило величину резерва времени h, система в отказе, $x_1 > 0$ – время до восстановления элемента K_1.

Временная диаграмма функционирования системы *S* изображена на Рисунке 4.2. На временной диаграмме ломаной линией показан отказ элементов, а жирной линией – функционирование элементов системы за счет резерва времени.

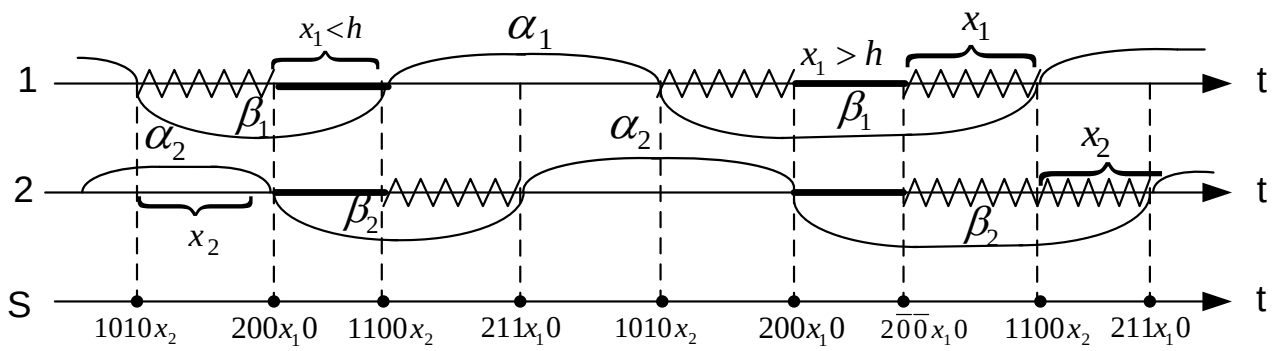


Рисунок 4.2 – Временная диаграмма функционирования системы

В монографии [15] показано, что стационарное распределение ВЦМ полумарковского процесса $\xi(t)$ имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\rho(1110x_2)=\rho(1010x_2)=\rho_0\bar{F}_2(x_2),\ \rho(211x_10)=\rho(210x_10)=\rho_0\bar{F}_1(x_1),\\ \rho(1100x_2)=\rho(1000x_2)=\rho_0\bar{G}_2(x_2),\ \rho(201x_10)=\rho(200x_10)=\rho_0\bar{G}_1(x_1),\\ \rho(1\overline{00}0x_2)=\rho_0\bar{G}_1(h)\bar{G}_2(x_2),\qquad \rho(2\overline{00}x_10)=\rho_0\bar{G}_2(h)\bar{G}_1(x_1),\end{gathered}\tag{4.17}$$

где постоянная ρ_0 находится из условия нормировки.

С целью упрощения модели системы *S*, построим укрупнённую полумарковскую модель системы, используя алгоритм стационарного фазового укрупнения, предложенный в [20, 101]. Для построения укрупненной полумарковской модели необходимо [18, 101]: определить укрупненное фазовое пространство состояний $\hat{E}$, в соответствии с исходным; вычислить вероятности перехода между состояниями, входящими в $\hat{E}$, и средние времена пребывания в этих состояниях.

Отметим, что укрупненная полумарковская модель приближенно описывает поведение исходной системы в установившемся режиме. Для систем с быстрым восстановлением (время безотказной работы значительно (в 10 и более раз) больше времени восстановления элементов) потеря точности составляет менее 2-3 %.

Фазовое пространство состояний *E* исходной модели расщепим на N=5 классов:

$$E_{11}=\{1110x_2,211x_10\},\ E_{10}=\{1100x_2,210x_10\},\ E_{01}=\{1010x_2,201x_10\},$$
$$E_{00}=\{1000x_2,200x_10\},\ E_{\overline{00}}=\{1\overline{00}0x_2,2\overline{00}x_10\},\qquad(4.18)$$

каждый из которых «склеивается» в одно состояние укрупнённой модели.

Фазовое пространство состояний $\hat{E}$ укрупнённой модели имеет вид:

$$\hat{E}=\{11,10,01,00,\overline{00}\}.\qquad(4.19)$$

Физический смысл состояний укрупнённой модели следующий:

- 11 – оба элемента функционируют;
- 01 – элемент K_1 восстанавливается, K_2 функционирует;
- 10 – элемент K_1 функционирует, K_2 восстанавливается;
- 00 – оба элемента восстанавливаются;
- $\overline{00}$ – отказ системы.

Граф переходов укрупненной системы представлен на Рисунке 4.3.

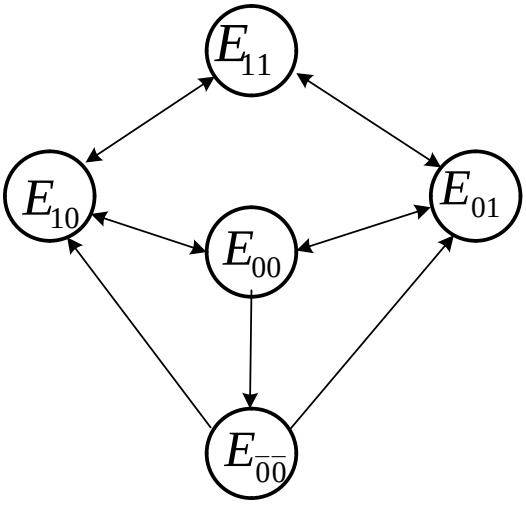


Рисунок 4.3 – Граф переходов укрупненной системы

Отметим, что фазовое пространство полумарковских состояний получается добавление к кодам физических состояний совокупности непрерывных компонент, фиксирующих остаточные времена действия факторов, изменяющих состояния системы. Эти непрерывные компоненты и желательно укрупнять, оставляя только дискретное множество физических состояний. Разбивать фазовое пространство состояний E исходной модели на классы можно различными

способами, используя основную идею: в классы объединяются однотипные состояния по определенному признаку, общему для них всех.

Определим вероятности перехода $\hat{p}_k^r$ ВЦМ и средние времена пребывания в состояниях $\hat{m}_k$ укрупнённой модели, которые согласно [20, 18] находятся по формулам (2.30).

Используя формулы (2.30), (4.16) и полумарковскую модель системы S, приведенную в [15], найдем вероятности перехода ВЦМ укрупненной модели, которые будут использованы при построении скрытой марковской модели:

$$\hat{p}_{11}^{10} = \frac{M\alpha_1}{M\alpha_1 + M\alpha_2}, \quad \hat{p}_{11}^{01} = \frac{M\alpha_2}{M\alpha_1 + M\alpha_2}, \quad \hat{p}_{10}^{11} = \frac{M\alpha_1}{M\alpha_1 + M\beta_2},$$

$$\hat{p}_{10}^{00} = \frac{M\beta_2}{M\alpha_1 + M\beta_2}, \quad \hat{p}_{01}^{11} = \frac{M\alpha_2}{M\alpha_2 + M\beta_1}, \quad \hat{p}_{01}^{00} = \frac{M\beta_1}{M\alpha_2 + M\beta_1},$$

$$\hat{p}_{\overline{00}}^{10} = \frac{\int_0^\infty \bar{G}_2(y)dy \int_0^y g_1(h+t)dt + \int_0^\infty \bar{G}_1(y)dy \int_y^\infty g_2(h+t)dt}{\bar{G}_1(h)M\beta_2 + \bar{G}_2(h)M\beta_1},$$

$$\hat{p}_{\overline{00}}^{01} = \frac{\int_0^\infty \bar{G}_2(y)dy \int_y^\infty g_1(h+t)dt + \int_0^\infty \bar{G}_1(y)dy \int_0^y g_2(h+t)dt}{\bar{G}_1(h)M\beta_2 + \bar{G}_2(h)M\beta_1},$$

$$\hat{p}_{00}^{\overline{00}} = \frac{\bar{G}_1(h)\int_h^\infty \bar{G}_2(t)dt + \bar{G}_2(h)\int_h^\infty \bar{G}_1(t)dt}{M\beta_1 + M\beta_2},$$

$$\hat{p}_{00}^{01} = \frac{\bar{G}_1(h)\int_0^h \bar{G}_2(t)dt + G_2(h)\int_0^\infty \bar{G}_1(t)dt}{M\beta_1 + M\beta_2}, \quad \hat{p}_{00}^{10} = \frac{G_1(h)\int_0^\infty \bar{G}_2(t)dt + \bar{G}_2(h)\int_0^h \bar{G}_1(t)dt}{M\beta_1 + M\beta_2}, \quad (4.20)$$

остальные $\hat{p}_k^r = 0$.

Используя формулы (2.30), (4.16) и полумарковскую модель системы S, приведенную в [15], средние времена пребывания в состояниях укрупненной модели:

$$\hat{m}_{11} = \frac{M\alpha_1 M\alpha_2}{M\alpha_1 + M\alpha_2}, \ \hat{m}_{10} = \frac{M\alpha_1 M\beta_2}{M\alpha_1 + M\beta_2}, \ \hat{m}_{01} = \frac{M\alpha_2 M\beta_1}{M\alpha_2 + M\beta_1},$$

$$\hat{m}_{00} = \frac{M\beta_1 M\beta_2}{M\beta_1 + M\beta_2}, \ \ \hat{m}_{00} = \frac{\bar{G}_2(h) M\beta_1 \bar{G}_1(h) M\beta_2}{\bar{G}_2(h) M\beta_1 + \bar{G}_1(h) M\beta_2}.$$

Зная $\hat{E}$, $\hat{p}_k^r$, $\hat{m}_k$ укрупненная модель построена. Отметим, что укрупненная модель также является полумарковской. Средние времена пребывания в состояниях укрупненной модели не будут учитываться в дальнейшем для построения СММ.

4.2.2. Скрытая марковская модель на основе укрупнённой полумарковской модели

Для полного описания СММ [127, 97, 93] необходимо определить:

1. Множество состояний модели.

В нашем случае, множество состояний модели соответствует множеству (4.19) состояний укрупненной модели.

2. Алфавит наблюдаемой последовательности (множество сигналов).

Предположим, что при функционировании системы S состояния ВЦМ укрупненной модели не наблюдаются (скрытые состояния), а наблюдаются только количество работоспособных элементов во время смены состояний ВЦМ. Введём следующее множество сигналов:

$$J = \{0,\ 1,\ 2\}, \tag{4.21}$$

где

- 0 – оба элемента восстанавливаются;
- 1 – работоспособен один элемент;
- 2 – оба элемента работоспособны.

Множество сигналов можно выбирать по-разному. Множество сигналов J (4.21) выбрано в таком виде, т.к. «точную» информацию о количестве работоспособных элементов можно получить практически для любой системы. Оно соответствует физическому описанию состояний модели, учитывая количество работоспособных элементов системы.

3. Матрицу переходных вероятностей между состояниями системы.

Пусть $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ – ВЦМ укрупнённой модели, вероятности переходов которой определяются формулами (4.20). Для нашей модели матрица переходных вероятностей состоит из переходных вероятностей (4.20) укрупненной полумарковской модели.

4. Связь состояний модели с сигналами.

Рассмотрим связь между состояниями ВЦМ укрупненной модели и сигналами, т.е. определим функцию связи $R(s \mid \boldsymbol{x})$ [127, 128]:

$$R(s \mid \boldsymbol{x}) = P(S_n = s \mid X_n = \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \hat{E}, \quad s \in J, \quad \sum_{s \in J} R(s \mid \boldsymbol{x}) = 1, \tag{4.22}$$

где S_n – n-ый сигнал.

Функция $R(s \mid \boldsymbol{x})$ связи состояний ВЦМ укрупненной модели с сигналами представлена в Таблице 4.4.

Таблица 4.4

Функция связи $R(s \mid \boldsymbol{x})$ состояний ВЦМ укрупненной модели с сигналами

Сигнал, s / Состояние, $\boldsymbol{x}$	s=0	s=1	s=2
11	0	0	1
10	0	1	0
01	0	1	0
00	1	0	0
$\overline{0}\overline{0}$	1	0	0

5. Начальное распределение вероятностей модели.

Будем считать, что в начальный момент времени укрупненная модель находится в состоянии 11. Следовательно, СММ в начальный момент времени с вероятностью 1 находится в состоянии 11, с нулевой вероятностью в остальных состояниях.

СММ на основе укрупненной полумарковской модели построена.

4.2.3. Анализ характеристик и прогнозирование состояний укрупненной полумарковской модели

Следуя [128, 127], перейдем к анализу характеристик укрупненной полумарковской модели на основе построенной СММ.

Пусть $\overline{S}^n = (S_1, S_2, ..., S_n)$ – случайный вектор первых n сигналов. Для полученного вектора сигналов $\overline{s}_n = (s_1, s_2, ..., s_n)$ пусть $\overline{s}_k = (s_1, s_2, ..., s_k)$, $k \le n$. Требуется оценить характеристики ВЦМ укрупненной (скрытой) модели на основе полученного вектора сигналов $\overline{s}_n$. Предполагается, что в начальный момент времени модель находится в состоянии 11.

Введём функции $F_k(i)$ (прямые переменные) [128, 127]:

$$F_k(i) = P(\overline{S}^k = \overline{s}_k, X_k = i), \; k = 1, 2, ..., n \; . \tag{4.23}$$

Для этих функций справедлива следующая рекуррентная формула [128, 127]:

$$F_k(i) = R(s_k \mid i) \sum_j F_{k-1}(j) P_j^i \; , \; F_1(i) = R(s_1 \mid i) p_i \; , \tag{4.24}$$

где P_j^i – вероятности перехода ВЦМ укрупнённой модели, определённые формулами (4.20), (p_i) – распределение начального состояния ВЦМ.

Рассмотрим также функции $B_k(i)$ (обратные переменные) [128, 127]:

$$B_k(i) = P(S_{k=1} = s_{k=1}, ..., S_n = s_n \mid X_k = i), \; k = \overline{1, n-1},$$

для которых справедлива рекуррентная формула [128, 127]:

$$B_k(i) = \sum_j R(s_{k+1} \mid j) B_{k+1}(j) P_i^j, \quad B_{n-1}(i) = \sum_j P_i^j R(s_n \mid j).$$

Функции $F_k(i)$, $B_k(i)$ играют важную роль при использовании скрытых марковских моделей для анализа функционирования систем.

Перейдем к анализу динамики укрупненной полумарковской модели, на основе построенной СММ.

Рассмотрим систему *S*, для которой перед началом её функционирования принято, что СВ $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ имеют распределение Эрланга IV порядка и $M\alpha_1 = 28{,}57$ ч., $M\alpha_2 = 25$ ч., $M\beta_1 = 2$ ч., $M\beta_2 = 1{,}6$ ч. Групповой мгновенно пополняемый резерв времени $h = 1{,}5$ часа.

Предположим, что в результате функционирования системы *S* получен следующий вектор сигналов:

$$\overline{s}_7 = (2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 1,\ 0),\ n=7.$$

Рассмотрим задачи по оценке характеристик скрытой марковской модели с учетом введённых параметров.

1. Определим вероятности состояний скрытой модели в момент испускания 7-го сигнала. Воспользуемся формулой [128, 127]:

$$P\left(X_n = i \mid \overline{S}^n = \overline{s}_n\right) = \frac{F_n(i)}{\sum_j F_n(j)}. \tag{4.25}$$

В результате получаем, что на 7-ом шаге укрупнённая модель с вероятностью 1 находилась в состоянии 00. Для состояний 11, 10, 01, $\overline{00}$ эта вероятность равна нулю.

2. Найдём вероятности, с которыми скрытая модель осуществит переход в состояния на следующем 8-ом шаге. Для этого используем формулу [128, 127]:

$$P(X_{n+1} = j \mid \overline{s}_n) = \sum_i P(X_n = i \mid \overline{s}_n) P_i^j, \tag{4.26}$$

Получаем следующие вероятности перехода скрытой модели на 8-ом шаге: в состояние 10 с вероятностью 0,3369, 01 – 0,5100, $\overline{00}$ – 0,1531; во все остальные – с нулевой вероятностью.

3. Определим вероятности появления сигналов на следующем 8-ом шаге, применим формулу [128]:

$$P(S_{n+1} = s_{n+1} \mid \overline{s}_n) = \sum_i P(X_{n+1} = i \mid \overline{s}_n) R\left(s_{n+1} \mid i\right), \tag{4.27}$$

при этом используется формула (4.26).

Получаем следующие вероятности появления сигналов на 8-м шаге: сигнал 1 с вероятностью 0,8469, 0 – 0,1531, 2 – 0.

4. Найдем вероятность появления (испускания) полученного вектора сигналов $\overline{s}_7$.

Для этого можно использовать формулы [128, 127]:

$$P\left(\overline{S}^n = \overline{s}_n\right) = \sum_i F_n(i) = \sum_i R(s_1 \mid i) B_1(i) p_i, \tag{4.28}$$

а также

$$P\left(\overline{S}^n = \overline{s}_n\right) = \sum_i F_k(i) B_k(i), \tag{4.29}$$

при любом фиксированном *k*.

Вероятность появления полученного вектора сигналов $\overline{s}_7$ равна 0,0031.

5. Прогнозирование состояний скрытой модели по полученному вектору сигналов.

На основании полученного вектора сигналов $\overline{s}_7$ необходимо найти наиболее вероятные состояния скрытой модели на переходах. Для решения этой задачи используется формула [128, 127]:

$$P\left(X_k = i \mid \overline{S}^k = \overline{s}_k\right) = \frac{F_k(i) B_k(i)}{\sum_j F_k(j) B_k(j)}. \tag{4.30}$$

Таким образом, необходимо найти *i*, которое максимизирует выражение $F_k(i) B_k(i)$.

В Таблице 4.5 указаны наиболее вероятные состояния скрытой модели на указанных в ней переходах и вероятности этих состояний.

Покажем влияние величины группового мгновенно пополняемого резерва времени на вероятность появления полученного вектора сигналов $\overline{s}_7 = (2, 1, 0, 1, 2, 1, 0)$. Результаты представлены в Таблице 4.6.

Таблица 4.5

Наиболее вероятные состояния скрытой модели на переходах

Номер перехода	1	2	3	4	5	6	7
Наиболее вероятное состояние	11	01	00	01	11	01	00
Вероятность состояния	1,000	0,550	1,000	0,597	1,000	0,550	1,000

Таблица 4.6

Вероятность появления $\overline{s}_7$ при различных значениях резерва времени

	h=1,5 часа	h=1,1 часа	h=0,7 часа	h=0,3 часа
$P\left(\overline{S}^n = \overline{s}_n\right)$	0,0031	0,0025	0,0016	0,0006

Из Таблицы 4.6 видно, что при уменьшении величины резерва времени, вероятность появления вектора сигналов $\overline{s}_7$ уменьшается. Это объясняется тем, что при уменьшении резерва времени увеличивается вероятность отказа системы, а т.к. полученный вектор сигналов не содержит отказа (двух последовательных нулей), то, следовательно, вероятность такой цепочки уменьшается.

Используя алгоритм Баума-Велша [68, 127, 97] можно уточнить начальные параметры модели, чтоб они наиболее точно согласовывались с полученным вектором сигналов.

Применяя этот алгоритм, получаем уточненную матрицу переходных вероятностей для рассматриваемой системы. На Рисунке 4.4 представлены: а)

исходная матрица переходных вероятностей P_i^j, б) уточненная матрица переходных вероятностей $\overline{P}_i^j$.

$$P_i^j = \begin{pmatrix} 0 & 0,5333 & 0,4667 & 0 & 0 \\ 0,9470 & 0 & 0 & 0,0530 & 0 \\ 0,9260 & 0 & 0 & 0,0740 & 0 \\ 0 & 0,3369 & 0,5100 & 0 & 0,1531 \\ 0 & 0,4221 & 0,5779 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

а)

$$\overline{P}_i^j = \begin{pmatrix} 0 & 0,4500 & 0,5500 & 0 & 0 \\ 0,3094 & 0 & 0 & 0,6906 & 0 \\ 0,3517 & 0 & 0 & 0,6483 & 0 \\ 0 & 0,4032 & 0,5968 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

б)

Рисунок 4.4 – Матрицы переходных вероятностей

Применяя алгоритм Витерби [137, 128, 127, 97] к уточненной модели, определяем наиболее вероятную цепочку состояний для полученного вектора сигналов: 11, 10, 00, 01, 11, 10, 00.

Расчеты для вектора сигналов $\overline{s}_{30}$ приведены в **Приложении Ж**. Программа в Maple для решения задач теории СММ представлена в **Приложении З**.

Выводы по Главе 4

1. В данной главе рассмотрена методика построения СММ на основе укрупненной полумарковской модели.

2. Построены СММ двухкомпонентной системы с поэлементным резервом времени и СММ двухкомпонентной системы с групповым мгновенно пополняемым резервом времени. Полученные СММ использовались для оценки

характеристик рассматриваемых систем и прогнозирования их состояний на основе полученного вектора сигналов.

3. Вероятность появления полученного вектора сигналов определена с помощью алгоритма прямого-обратного хода. Показано влияние величины резерва времени на вероятность появления полученного вектора сигналов.

4. Алгоритм Витерби использовался для поиска наиболее вероятной последовательности состояний, соответствующей заданной вектору сигналов. СММ обучалась с использованием алгоритма Баума-Велша.

5. Результаты данной главы позволяют применение рассмотренной методики построения СММ к анализу функционирования систем различного назначения, для которых построены полумарковские модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе решена задача разработки и развития методов математического моделирования систем различного назначения с резервом времени и их моделей на основе полумарковских и скрытых марковских моделей. Результаты работы являются новыми, имеют теоретическую и практическую ценность и позволяют анализировать влияние величины РВ на стационарные характеристики надежности и эффективности системы, что, в свою очередь, позволяет решать оптимизационные задачи, связанные с распределением величин РВ.

Основные научные результаты работы и выводы заключаются в следующем:

1. Разработаны полумарковские модели двух- и многокомпонентных систем с поэлементным мгновенно пополняемым резервом времени. Их существенной особенностью является то, что случайные величины времени безотказной работы, времени восстановления и резерва времени имеют функции распределения общего вида.

2. Получены расчетные аналитические и приближенные формулы для нахождения стационарных характеристик надежности и эффективности рассматриваемых систем, на примере которых показано, что асимптотический и стационарный алгоритмы фазового укрупнения могут быть эффективно использованы для анализа систем с резервом времени.

3. Решена задача анализа надежности и эффективности нефтепровода с поэлементными резервуарными парками, результаты которой при должной технологической переформулировке можно использовать для анализа надежности и эффективности системы газопровода с подземными хранилищами газа, системы водоснабжения с резервуарами на каждом участке, информационной системы с поэлементными хранилищами данных, систем электроэнергетики с поэлементными накопителями энергии.

4. Разработаны полумарковские модели и получены формулы для расчета производительности ТЯ при наличии резерва времени. Проведен анализ влияния резерва времени на производительность ТЯ.

5. Предложена методика построения СММ для систем, допускающих построение полумарковской модели. Используя эту методику, построены СММ на основе укрупненной полумарковской модели с поэлементным и групповым мгновенно пополняемым резервом времени.

6. Решены задачи определения характеристик и прогнозирования состояний скрытой модели на основе полученного вектора сигналов.

7. Полученные в ходе исследования результаты (при отсутствии резерва времени) согласуются с результатами, полученными для рассматриваемых систем без резерва времени.

8. Полученные результаты позволяют рассчитывать стационарные характеристики надежности и эффективности систем различного назначения с учетом резерва времени, решать оптимизационные задачи распределения резерва времени между элементами системы.

9. Разработанные полумарковские и скрытые марковские модели могут быть использованы для создания на их основе алгоритмов и информационных систем поддержки принятия решений при проектировании и эксплуатации систем различного назначения.

10. Разработанные скрытые марковские модели систем позволяют прогнозировать состояния системы на основе полученного вектора сигналов, находить наиболее вероятные последовательности состояний по сигналам.

СПИСОК УСЛОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ

АФУ	–	алгоритм фазового укрупнения
ВБР	–	время безотказной работы
ВВ	–	время восстановления
ВЦМ	–	вложенная цепь Маркова
ПМ	–	полумарковский(ая)
ПМВ	–	процесс марковского восстановления
ПМП	–	полумарковский процесс
ПР	–	плотность распределения
РВ	–	резерв времени
СВ	–	случайная величина
СММ(HMM)	–	скрытая марковская модель
СПММ	–	скрытая полумарковская модель
ТЯ	–	технологическая ячейка
ФПС	–	фазовое пространство состояний
ФР	–	функция распределения

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

E	–	измеримое ФПС
E_+, E_-	–	множество работоспособных и отказовых состояний системы соответственно
E^0	–	множество эргодических состояний системы
P(A)	–	вероятность случайного события А
E_1 / E_2	–	разность множеств
$M\alpha$	–	математическое ожидание СВ α
T_+, T_-	–	средние стационарные времена наработки на отказ и восстановления (соответственно) системы
$K_Г$	–	стационарный коэффициент готовности системы
S	–	средняя удельная прибыль в единицу календарного времени
C	–	средние удельные затраты в единицу времени исправного функционирования
$\alpha \wedge \beta$	–	$\min(\alpha,\beta) = \begin{cases} \alpha, \alpha < \beta; \\ \beta, \alpha \geq \beta \end{cases}$
$[\alpha - x]^+$	–	остаточное время действия СВ α, при условии, что время действия СВ α превысило время x.

Список использованной литературы

1. Байхельт, Ф., Франкен, П. Надежность и техническое обслуживание / Ф. Байхельт, П. Франкен. – М.: Радио и связь, 1988. – 392 с.
2. Барлоу, Р. Надежность технических систем: Справочник / Р. Барлоу, Ю.К. Беляев, В.А. Богатырев и др.; под ред. И.А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1985. – 606 с.
3. Бобович, Л.М. Оценка надежности приборов с учетом временного резервирования / Л.М. Бобович // Промышленные методы измерения расхода жидкости и газа. – 1988. – №. 2. – С. 71-76.
4. Генис, Я.Г. Оценка надежности восстанавливаемых резервированных систем при различных дисциплинах восстановления / Я.Г. Генис // Надежность и контроль качества. – 1986. – №. 9. – С. 33-39.
5. Гильман, А.С., Якобсон, Г.Р., Жук, А.И. Анализ надежности многофункциональных систем со структурной и временной избыточностью методами вероятностного моделирования на ЭВМ / А.С. Гильман, Г.Р. Якобсон, А.И. Жук // Надежность и контроль качества. – 1986. – №. 9. – С. 40-44.
6. Деундяк, В.М., Жданова, М.А. О решении задачи оценивания скрытых полумарковских моделей фергюсоновского типа / В.М. Деундяк, М.А. Жданова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2015. – №. 3 (187). – С. 19-24.
7. Дружинин, Г.В. Надежность автоматизированных производственных систем / Г.В. Дружинин. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 480 с.
8. Зедгенидзе, Г.Г. О влиянии быстродействия технической системы с временной избыточностью на ее надежность и производительность / Г.Г. Зедгенидзе // Надежность и контроль качества. – 1986. – №. 7. – С. 46-52.
9. Зеленцов, В.А. Модель для оценивания надежности системы с резервом времени / В.А. Зеленцов // Исследование операций и АСУ. – 1991. – №. 35. – С. 39-43.

10. Каштанов, В.А. Оптимальные задачи технического обслуживания / В.А. Каштанов. – М.: Знание, 1981. – 48 с.
11. Каштанов, В.А. Полумарковские модели процесса технического обслуживания / В.А. Каштанов. – М.: Знание, 1987. – 91 с.
12. Каштанов, В.А., Зайцева, О.Б. Исследование операций (линейное программирование и стохастические модели). – Москва: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. – 256 с.
13. Каштанов, В.А., Медведев, А.И. Теория надежности сложных систем / В.А. Каштанов, А.И. Медведев. – 2-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 608 с.
14. Копп, В.Я., Обжерин, Ю.Е., Песчанский, А.И. Моделирование автоматизированных линий / В.Я. Копп, Ю.Е. Обжерин, А.И. Песчанский. – Севастополь: Изд-во СевГТУ, 2006. – 240 с.
15. Копп, В.Я., Обжерин, Ю.Е., Песчанский, А.И. Стохастические модели автоматизированных производственных систем с временным резервированием / В.Я. Копп, Ю.Е. Обжерин, А.И. Песчанский. – Севастополь: Изд-во СевГТУ, 2000. – 284 с.
16. Корлат, А.Н., Кузнецов, В.Н., Новиков, М.М., Турбин, А.Ф. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А.Н. Корлат, В.Н. Кузнецов, М.М. Новиков, А.Ф. Турбин. – Кишинев: Штиинца, 1991. – 276 с.
17. Королев, А.В. Методы обработки нестандартных сигналов, основанных на скрытых марковских моделях: дис. … канд. техн. наук: 05.12.04 / Королев Алексей Викторович. – Нижний Новгород, 2009. – 183 с.
18. Королюк, В.С. Стохастические модели систем / В.С. Королюк. – Киев: Наук. Думка, 1989. – 208 с.
19. Королюк, В.С., Турбин, А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. – Киев: Наукова думка, 1976. – 184 с.

20. Королюк, В.С., Турбин, А.Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. – К.: Наук. Думка, 1982. – 236 с.
21. Креденцер, Б.П. Прогнозирование надежности систем с временной избыточностью / Б.П. Креденцер. – Киев: Наук. Думка, 1978. – 240 с.
22. Кузнецов, В.Н., Турбин, А.Ф., Цатурян, Г.Ж. Полумарковская модель восстанавливаемых систем / В.Н. Кузнецов, А.Ф. Турбин, Г.Ж. Цатурян. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1981. – 44 с. (Препринт 81.11).
23. Кутоянц, Ю.А. Оценка параметров скрытых марковских процессов с непрерывным временем / Ю.А. Кутоянц // Автоматика и телемеханика. – 2020. – № 3. – С. 86–113.
24. Львович, И.Я. Моделирование распознания рукописного текста на основе скрытых марковских моделей: монография / И.Я. Львович, Я.Е. Львович, А.А. Мозговой, А.П. Преображенский, О.Н. Чопоров. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – 164 с.
25. Надежность систем энергетики и их оборудования: в 4 т. / Г.Н. Антонов и др.; под общ. ред. Ю.Н. Руденко. – Т.1. Справочник по общим моделям анализа и синтеза надежности систем энергетики / Под ред. Ю.Н. Руденко. – М: Энергоатомиздат, 1994. – 480 с.
26. Надежность систем энергетики и их оборудования: в 4 т. / Г.Н. Антонов и др.; под общ. ред. Ю.Н. Руденко. – Т.2. Надежность электроэнергетических систем / Под ред. М.Н. Розанова. – М.: Энергоатомиздат, 2000. – 568 с.
27. Новиков, Е.В. Методы анализа надежности сложных технических систем с временной избыточностью инфраструктуры железнодорожного транспорта: дис. … канд. техн. наук: 05.13.01 / Новиков Евгений Владимирович. – М., 2012. – 119 с.
28. Новиков, Е.В. Оценка влияния временного резервирования на надежность сложных технических систем / Е.В. Новиков // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2010. – № 3(2). – С. 28–33.

29. Обжерин, Ю.Е. Методы анализа автоматизированных сборочных систем с временным резервированием: дис. ... доктора технических наук: 05.13.07 / Обжерин Юрий Евгеньевич. – Севастополь, 1996. – 334 с.
30. Обжерин, Ю.Е. Полумарковские модели в анализе показателей надежности восстанавливаемых систем с резервом времени: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.05 / Обжерин Юрий Евгеньевич. – Киев, 1984. – 132 с.
31. Обжерин, Ю.Е., Бойко, Е.Г., Сидоров, С.М. Анализ влияния резерва времени на производительность технологической ячейки / Ю.Е. Обжерин, Е.Г. Бойко, С.М. Сидоров // Автоматизация и приборостроение: проблемы, решения: материалы международной научно-технической конференции. – Севастополь: Севастопольский государственный университет. – 2016. – С. 12– 13.
32. Обжерин, Ю.Е., Бойко, Е.Г., Сидоров, С.М. Влияние мгновенно пополняемого резерва времени на производительность технологической ячейки / Ю.Е. Обжерин, Е.Г. Бойко, С.М. Сидоров // Автоматизация и приборостроение: проблемы, решения: материалы международной научно-технической конференции. – Севастополь: Севастопольский государственный университет. – 2015. – С. 15– 16.
33. Обжерин, Ю.Е., Бойко, Е.Г., Сидоров, С.М. Влияние резерва времени на производительность технологической ячейки / Ю.Е. Обжерин, Е.Г. Бойко, С.М. Сидоров // Прикладные задачи математики: материалы XXIV международной научно-технической конференции. – Севастополь: ФГАОУ ВО "Севастопольский государственный университет". – 2016. – С. 145– 148.
34. Обжерин, Ю.Е., Бойко, Е.Г., Сидоров, С.М. Производительность технологической ячейки с мгновенно пополняемым резервом времени / Ю.Е. Обжерин, Е.Г. Бойко, С.М. Сидоров // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской конференции с международным участием. – Москва: Российский университет дружбы народов – 2016. – С. 107-109.

35. Обжерин, Ю.Е., Бойко, Е.Г., Сидоров, С.М. Производительность технологической ячейки с мгновенно пополняемым резервом времени / Ю.Е. Обжерин, Е.Г. Бойко, С.М. Сидоров // Прикладные задачи математики: материалы XXIII международной научно-технической конференции. – Севастополь: ФГАОУ ВО "Севастопольский государственный университет". – 2015. – С. 159– 163.
36. Обжерин, Ю.Е., Никитин, М.М., Сидоров, С.М. Программа анализа надёжности и эффективности систем с резервом времени. – 2019. – Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019614657, 10.04.2019.
37. Обжерин, Ю.Е., Никитин, М.М., Сидоров, С.М. Программа расчета показателей надежности многокомпонентной системы. – 2019. – Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019619864, 25.07.2019.
38. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М. Влияние мгновенно пополняемого резерва времени на характеристики надежности многокомпонентной системы /Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров // Прикладные задачи математики: материалы XXV международной научно-технической конференции. – Севастополь: ФГАОУ ВО "Севастопольский государственный университет". – 2017. – С. 150-155.
39. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М. Полумарковские модели многофазных систем с промежуточными накопителями / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы Всероссийской конференции с международным участием. – Москва: Российский университет дружбы народов. – 2015. – С. 44-46.
40. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Бойко, Е.Г., Федоренко, С.Н. Стационарное фазовое укрупнение двухкомпонентной системы с поэлементным резервом времени / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, Е.Г. Бойко, С.Н. Федоренко // Прикладные задачи математики: материалы XXVI международной научно-

технической конференции. – Севастополь: ФГАОУ ВО "Севастопольский государственный университет". – 2018. – С. 208–214.

41. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Никитин, М.М. Анализ надежности и фазовое укрупнение систем с поэлементными накопителями / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, М.М. Никитин // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2019. – № 6. – С. 66– 77.
42. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Никитин, М.М. Анализ надежности систем с поэлементными накопителями / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, М.М. Никитин // В сборнике: Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Международный научный семинар им. Ю.Н. Руденко. Иркутск, 2018. – С. 187– 195.
43. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Никитин, М.М. О применении суперпозиции полумарковских процессов к моделированию систем энергетики / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, М.М. Никитин // В сборнике: Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Международный научный семинар им. Ю.Н. Руденко, 91-е заседание семинара на тему «Методические и практические проблемы надежности систем энергетики», в 2-х книгах. Отв. ред. Н.И. Воропай, 2019. – С. 269-274.
44. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Никитин, М.М. Полумарковская модель многокомпонентной энергетической системы с покомпонентными накопителями / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, М.М. Никитин // Проблемы энерго- и ресурсосбережения. – 2019. – № 3–4. – С. 101–110.
45. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Никитин, М.М. Применение суперпозиции независимых полумарковских процессов и скрытых марковских моделей к моделированию систем энергетики / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, М.М. Никитин // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2020. – № 3. – С. 69–80.
46. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Никитин, М.М. Производительность технологической ячейки с мгновенно пополняемым резервом времени (без прекращения обработки) / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, М.М. Никитин //

Автоматизация и измерения в машино- приборостроении: научный журнал. – 2020. – №. 2 (10). – С. 39 – 50.

47. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Никитин, М.М. Скрытая марковская модель информационной системы с резервом времени / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, М.М. Никитин // В сборнике: Проблемы информационной безопасности. Труды VI Всероссийской с международным участием научно-практической конференции, 2020. – С. 35–37.
48. Обжерин, Ю.Е., Сидоров, С.М., Федоренко, С.Н. Полумарковская модель технической системы с групповым, мгновенно пополняемым резервом времени / Ю.Е. Обжерин, С.М. Сидоров, С.Н. Федоренко // Автоматизация и приборостроение: проблемы, решения. Материалы Международной научно-технической конференции. – Севастополь. – 2017. – С. 54-55.
49. Песчанский, А. И. Полумарковская модель восстанавливаемой системы с поэлементным временны́м резервированием / А.И. Песчанский // Автоматика и телемеханика. – 2019. – № 12. – С. 146–159.
50. Песчанский, А. И. Стационарные характеристики ненадежной многоканальной системы обслуживания с потерями и временны́м резервом / А.И. Песчанский // Автоматика и телемеханика. – 2019. – № 4, – С. 70–92.
51. Половко, А.М., Гуров, С.В. Основы теории надежности, 2-е издание / А.М. Половко, С.В. Гуров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 704 с.
52. Руденко, Ю.Н., Ушаков, И.А. Надежность систем энергетики / Ю.Н. Руденко, И.А. Ушаков. – 2-е изд. перераб. и доп.– Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. – 328 с.
53. Савин, А.Н., Тимофеева, Н.Е., Гераськин, А.С., Мавлютова, Ю.А. Разработка системы распознавания речи на основе скрытых марковских моделей отдельных слов / А.Н. Савин, Н.Е. Тимофеева, А.С. Гераськин, Ю.А. Мавлютова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – Том 17, выпуск 4. – С. 452–464.
54. Северцев, Н.А. Надежность сложных систем в эксплуатации и отработке / Н.А. Северцев. – М.: Высшая школа, 1989. – 432 с.

55. Смирнов, Н.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1986. – 328 с.
56. Советов, Б.Я. Моделирование систем: Учеб. Для вузов – 3-е изд., перераб. и доп. / Б.Я. Советов, С.А. Советов. – М.: Высш. шк., 2001. – 343 с.
57. Харламов, Б.П. Непрерывные полумарковские процессы / Б.П. Харламов. – СПб.: Наука, 2001. – 418 с.
58. Харченко, В.С. Оценка устойчивости многоальтернативных вычислительных систем с временной избыточностью / В.С. Харченко // Изв. вузов. Сер. Приборостроение. – 1991. – № 11. – С. 102–107.
59. Черкесов, Г.Н. Использование резерва времени в одноканальной системе с двумя типами отказов / Г.Н. Черкесов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1986. – № 6. – С. 73–78.
60. Черкесов, Г.Н. Надежность аппаратно-программных комплексов / Г.Н. Черкесов. – СПб.: Питер, 2005. – 479 с.
61. Черкесов, Г.Н. Надежность технических систем с временной избыточностью / Г.Н. Черкесов. – Москва: Сов. Радио, 1974. – 296 с.
62. Шуренков, В.М. Эргодические процессы Маркова / В.М. Шуренков. – М.: Наука, 1989. – 336 с.
63. Archer, G.-E.B., Titterington, D.M.: Parameter estimation for hidden Markov chains // Stat. Plann. Infer., Vol. 108(1–2), 2002. P. 365–390.
64. Barbu, V.S., Karagrigoriou, A., Makrides, A. Semi-Markov Modelling for Multi-State Systems // Methodology and Computing in Applied Probability, Vol. 19, 2017. P. 1011–1028.
65. Barbu, V.S., Limnios, N. Maximum likelihood estimation for hidden semi-Markov models // C.R. Acad. Sci. Paris, Vol. 342(3), 2006. P. 201-205.
66. Barbu, V.S., Limnios, N. Semi-Markov Chains and Hidden Semi-Markov Models Toward Applications: Their Use in Reliability and DNA Analysis // V.S. Barbu, N. Limnios. – New York, Springer, 2008. 226 p.

67. Barnes, A.K., Balda, J.C., Escobar-Mejía, A. A Semi-Markov Model for Control of Energy Storage in Utility Grids and Microgrids With PV Generation // In IEEE Transactions on Sustainable Energy, Vol. 6, no. 2, 2015. P. 546-556.
68. Baum, L.E. An inequality and associated maximization technique in statistical estimation for probabilistic functions of Markov processes // In Shisha, O. (Ed.), Inequalities III: Proceedings of the 3rd Symposium on Inequalities, 1972. P. 1–8.
69. Baum, L.E., Petrie, T. Statistical Inference for Probabilistic Functions of Finite State Markov Chains // The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 37(6), 1966. P. 1554–1563.
70. Beichelt, F., Tittmann, P. Reliability and Maintenance: Networks and System // F. Beichelt, P. Tittmann. – New York, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012. 344 p.
71. Birolini, A. Reliability & Availability of Repairable Systems. In: Reliability Engineering // A. Birolini. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2017. P. 169-310.
72. Boussemart, Y., Cummings, M.L. Predictive models of human supervisory control behavioral patterns using hidden semi-Markov models // Engineering Applications of Artificial Intelligence, Vol. 24, Issue 7, 2011. P. 1252-1262.
73. Bulla, J., Bulla, I. Stylized facts of financial time series and hidden semi-Markov models // Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 51 (4), 2006. P. 2192-2209
74. Cannarile, F., Compare, M., Baraldi, P., Di Maio, F., Zio, E. Homogeneous Continuous-Time, Finite-State Hidden Semi-Markov Modeling for Enhancing Empirical Classification System Diagnostics of Industrial Components // Machines, Vol. 6, 2018. Art. No. 34.
75. Cappe´, O., Moulines, E., Ryde´n, T. Inference in Hidden Markov Models // O. Cappe´, E. Moulines, T. Ryde´n. – New York, Springer Science+Business Media, 2005. 653 p.
76. Cartella, F., Lemeire, J., Dimiccoli, L., Sahli, H. Hidden Semi-Markov Models for Predictive Maintenance // Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2015, Article ID 278120, 2015. 23 pages.

77. Chigansky, P., Van Handel, R. / A complete solution to Blackwell's unique ergodicity problem for hidden Markov chains. // The Annals of Applied Probability, Vol. 20(6), 2010. P. 2318-2345.
78. Churchill, G. Hidden Markov chains and the analysis of genome structure // Comput. Chem., Vol. 16(2), 1992. P. 107–115.
79. Curry, G.L. Feldman, R.M. Manufacturing Systems Modeling and Analysis, 2nd ed. // G.L. Curry, R.M. Feldman. – Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 2011.
80. Dempster, A.P., Laird, N.M., Rubin, D.B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm // Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 39 (1), 1977. P. 1–21.
81. Dong, Wenjie et al. Reliability variation of multi-state components with inertial effect of deteriorating output performances // Reliab. Eng. Syst. Saf., Vol. 186, 2019. P. 176-185.
82. Durand, J.-B., Gaudoin, O. Software reliability modelling and prediction with hidden Markov chains // Statistical Modelling - An International Journal., Vol. 5(1), 2005. P. 75–93.
83. Durante, J., Nascimento, J.M., Powell, W.B. Backward Approximate Dynamic Programming with Hidden Semi-Markov Stochastic Models in Energy Storage Optimization // arXiv: Optimization and Control, 2017. 36 p.
84. Elliott, R., Limnios, N., Swishchuk, A. Filtering hidden semi-Markov chains // Stat. Probab. Lett., Vol. 83, 2013. P. 2007–2014.
85. Elliott, R.J., Aggoun, L., Moore, J.B. Hidden Markov Models: Estimation and Control // R.J. Elliott, L. Aggoun, J.B. Moore. – Stochastic Modelling and Applied Probability, Vol. 29. New York, Springer-Verlag New York, 1995. 382 p.
86. Ephraim, Y., Merhav, N. Hidden Markov processes // IEEE Trans. Information Theory, Vol. 48 (6), 2002. P. 1518–1569.
87. Fraser, A.M. Hidden Markov Models and Dynamical Systems // A.M. Fraser. – Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008. 143 p.

88. Glech, S.G., Sidorov S.M., Nikitin M.M. Semi-Markov Model of a Technical System with Maintenance and Time Reserve // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, Vol. 709, 2020. Art. No. 033028.
89. Grabski, F. Semi-Markov Processes: Applications in System Reliability and Maintenance // F. Grabski. – Gdynia, Poland, Elsevier Science, 2014. 270 p.
90. Ibe, O. Markov Processes for Stochastic Modeling (Second Edition) // O. Ibe. – Elsevier, 2013. 514 p.
91. Jansen, J., Limnios, N. (Eds.) Semi-Markov Models and Applications // J. Jansen, N. Limnios (Eds). – Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1999. 404 p.
92. Jia, Xujie et al. Reliability Analysis for Repairable Multistate Two-Unit Series Systems When Repair Time Can Be Neglected // IEEE Transactions on Reliability, Vol. 65, 2016. P. 208-216.
93. Jurafsky, D., Martin, J.H. Hidden Markov models (draft chapter), 2019. URL https://web.stanford.edu/~jurafsky/slp3/A.pdf.
94. Kakubava, R.V., Khurodze, R.A. Technical Systems with Structural and Time Redundancy: A Probabilistic Analysis of Their Performance // Automation and Remote Control, Vol. 65, 2004. P. 825–833.
95. Kalimulina, E.Y. Analysis of system reliability with control, dependent failures, and arbitrary repair times // Int J Syst Assur Eng Manag, Vol. 8, 2017. P. 180–188.
96. Keroglou, C., Hadjicostis, C.N. Probabilistic system opacity in discrete event systems // Discrete Event Dynamic Systems, Vol. 28, 2018. P. 289–314.
97. Kobayashi, H., Mark, B., Turin, W. Probability, Random Processes, and Statistical Analysis: Applications to Communications, Signal Processing, Queueing Theory and Mathematical Finance // H. Kobayashi, B. Mark, W. Turin. – Cambridge, Cambridge University Press, 2011.
98. Kobayashi, H., Yu, S.-Z. Hidden semi-Markov models and efficient forward–backward algorithms // In: 2007 Hawaii and SITA Joint Conference on Information Theory, Honolulu, Hawaii, 29–31 May 2007. P. 41–46

99. Kong, D., Chen, Y., Li, N. Hidden semi-Markov model-based method for tool wear estimation in milling process // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol. 92, 2017. P. 3647–3657.
100. Kontoyiannis, I., Meyn, S.P. Approximating a diffusion by a finite-state hidden Markov model // Stochastic Processes and their Applications, Vol. 127 (8), 2017. P. 2482-2507.
101. Korolyuk, V.S., Korolyuk, V.V. Stochastic Models of Systems // V.S. Korolyuk, V.V. Korolyuk. – Dordrecht, Springer Science+Business Media, 1999. 185 p.
102. Korolyuk, V.S., Limnios, N. Stochastic Systems in Merging Phase Space // V.S. Korolyuk, N. Limnious. – London, World Scientific, Imperial Colledge Press, 2005. 348 p.
103. Kumar, G., Jain, V., Soni, U. Modelling and simulation of repairable mechanical systems reliability and availability // Int J Syst Assur Eng Manag, Vol.10, 2019. P. 1221–1233.
104. Kumar, V.P., Wang, S.J. Reliability enhancement by time and space redundancy in multistage interconnection networks // IEEE Trans. Reliab., Vol. 40(4), 1991. P. 461–473.
105. Lember, J., Sova, J. Existence of infinite Viterbi path for pairwise Markov models // Stochastic Processes and their Applications, Vol. 130 (3), 2020. P. 1388-1425.
106. Limnios N., Oprisan G. Semi-Markov Processes and Reliability // N. Limnios, G. Oprisan. – New York, Springer Science+Business Media, 2001. 222 p.
107. Liu, M., Li, W., Wang, C., Polis, M. P., Wang, L. Y., Li, J. Reliability Evaluation of Large Scale Battery Energy Storage Systems // IEEE Transactions on Smart Grid, Vol. 8(6), 2017. P. 2733–2743.
108. Liu, Q., Dong, M., Peng, Y. A dynamic predictive maintenance model considering spare parts inventory based on hidden semi-Markov model // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 227(9), 2013. P. 2090–2103.

109. Mendes, Angélica Alebrant et al. Optimal Time Interval Between Periodic Inspections for a Two-Component Cold Standby Multistate System // IEEE Transactions on Reliability, Vol. 66, 2017. P. 559-574.
110. Mor, B., Garhwal, S., Kumar, A. A Systematic Review of Hidden Markov Models and Their Applications. // Archives of Computational Methods in Engineering, 2020. https://doi.org/10.1007/s11831-020-09422-4
111. Narimatsu, H., Kasai, H. State duration and interval modeling in hidden semi-Markov model for sequential data analysis // Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, Vol. 81, 2017. P. 377–403.
112. Obzherin, Y., Nikitin, M., Sidorov, S. Analysis of reliability and efficiency of electric power systems on the basis of semi-markov models with common phase space of states // Smart Innovation, Systems and Technologies, Vol. 154, 2020. P. 631-641.
113. Obzherin, Y.E., Boyko, E.G. Semi-Markov Models: Control of Restorable Systems with Latent Failures // Y.E. Obzherin, E.G. Boyko. – London, Elsevier Academic Press, 2015, 212 p.
114. Obzherin, Y.E., Sidorov, S.M., Nikitin, M.M. Hidden Markov Model of Information System with Component-Wise Storage Devices // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), Vol. 11965, 2019. P. 354-364.
115. Obzherin, Y.E., Sidorov, S.M., Nikitin, M.M. Reliability of the information system with intermediate storage devices // Communications in Computer and Information Science, Vol. 919, 2018. P. 432-444.
116. Obzherin, Yu.E., Nikitin, M.M., Sidorov, S.M. Application of hidden Markov models for analyzing the dynamics of technical systems // AIP Conference Proceedings, Vol. 2188, 2019. Art. No. 050019.
117. Obzherin, Yu.E., Peschansky, A.I. Reliability analysis of a system with combined time reserve // Cybern. Syst. Anal., Vol. 40(5), 2004. P. 747–754.
118. Obzherin, Yu.E., Sidorov, S.M. Semi-Markov Model and Phase-Merging Scheme of a Multi-Component System with the Group Instantly Replenished Time Reserve

// International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, Vol. 26, No. 3, 2019. Art. no.1950014.

119. Obzherin, Yu.E., Sidorov, S.M., Fedorenko, S.N. Analysis of the time reserve influence on the technological cell productivity // MATEC Web of Conferences, Vol. 129, 2017. Art. No. 03009.
120. Obzherin, Yu.E., Sidorov, S.M., Fedorenko, S.N. Semi-Markov model of a technical system with the component-wise instantly replenished time reserve // MATEC Web of Conferences, Vol. 224, 2018. Art. No. 04008.
121. Obzherin, Yu.E., Sidorov, S.M., Nikitin, M.M. Analysis of reliability of systems with component-wise storages // E3S Web of Conferences, Vol. 58, 2018. Art. No. 02024.
122. Obzherin, Yu.E., Sidorov, S.M., Nikitin, M.M. Hidden Markov model of information system with component-wise storage devices // В сборнике: DCCN-2019. Материалы XXII Международной научной конференции. Под общей редакцией В.М. Вишневского, К.Е. Самуйлова, 2019. С. 100-107.
123. Obzherin, Yu.E., Sidorov, S.M., Nikitin, M.M. On application of semi-Markov processes superposition to energy systems modeling // E3S Web of Conferences, Vol. 139, 2019. Art. No. 01064.
124. Obzherin, Yu.E., Sidorov, S.M., Nikitin, M.M. Semi-Markov model of a multi-component energy system with component-wise storages // E3S Web of Conferences, Vol. 139, 2019. Art. No. 01065.
125. Obzherin, Yu.E., Skatkov, A.V. On the time to failure of systems with large replenishable reserve time // J. Math. Sci., Vol. 57(5), 1991. P. 3429–3432.
126. Peschansky, A.I. Semi-Markov model of a restorable system with elementwise time redundancy // Autom. Remote Control, Vol. 80 (12), 2019. P. 2206–2216.
127. Rabiner, L.R. A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition // in Proceedings of the IEEE, Vol. 77, no. 2, 1989. P. 257-286.
128. Ross, S.M. Introduction to Probability Models, 9th ed. // S.M. Ross. – USA, Elsevier Academic Press, 2006.

129. Senanayake, C.D., Subramaniam, V. Analysis of a two-stage, flexible production system with unreliable machines, finite buffers and non-negligible setups // Flex Serv Manuf J, Vol. 25, 2013. P. 414–442.
130. Smith, J.M. Tan, B. (Eds.), Handbook of Stochastic Models and Analysis of Manufacturing System Operations // J. MacGregor Smith, B. Tan (Eds.). – New York, Springer-Verlag New York, 2013. 373 p.
131. Ushakov, I.A. Probabilistic Reliability Models // I.A. Ushakov. – Wiley, 2012. 244 p.
132. Van der Hoek, J., Elliott, R. Introduction to Hidden Semi-Markov Models // J. Van der Hoek, R. Elliott. – Cambridge, Cambridge University Press, 2018. 184 p.
133. Van Handel, R. Observability and nonlinear filtering // Probability Theory and Related Fields, Vol. 145(1-2), 2009. P. 35-74.
134. Van Handel, R. The stability of conditional Markov processes and Markov chains in random environments // The Annals of Probability, Vol. 37(5), 2009. P. 1876–1925.
135. Van Handel, R. Uniform Observability of Hidden Markov Models and Filter Stability for Unstable Signals // The Annals of Applied Probability, Vol. 19(3), 2009. P. 1172–1199.
136. Vidyasagar, M. Hidden Markov Processes: Theory and Applications to Biology // M. Vidyasagar. – Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton, Princeton University Press, 2014. 312 p.
137. Viterbi, A.J. Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm // IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 13 (2), 1967. P. 260–269.
138. Votsi, I., Limnios, N., Papadimitriou, E., Tsaklidis, G. Earthquake Statistical Analysis through Multi-state Modeling // I. Votsi, N. Limnios, E. Papadimitriou, G. Tsaklidis. – ISTE Ltd and John Wiley & Sons, 2019. 180 p.
139. Wu, X., Hillston, J. Mission reliability of semi-Markov systems under generalized operational time requirements // Reliability Engineering and System Safety, Vol. 140, 2015. P. 122-129.

140. Wu, X., Yu, H. Approximation method for reliability of one-unit repairable system with time redundancy // Proceedings of the 28th International European Safety and Reliability Conference (ESREL2018), 2018.
141. Xu, X., Bishop, M., Oikarinen, D. G., Hao, C. Application and modeling of battery energy storage in power systems // CSEE Journal of Power and Energy Systems, Vol. 2(3), 2016. P. 82–90.
142. Yan, H., Gao, L., Qi, L. et al. Simplified Markov Model for Reliability Analysis of Phased-Mission System Using States Merging Method // J. Shanghai Jiaotong Univ. (Sci.), Vol. 23, 2018. P.418–422.
143. Yao, D.D., Buzacott, J.A. Flexible manufacturing systems: A review of analytical models // Manage. Sci., Vol. 32, 1986. P. 890–905.
144. Yao, D.D., Buzacott, J.A. Models of flexible manufacturing systems with limited local buffers // Int. J. Prod. Res., Vol. 24, 1986. P. 107–118.
145. Yu, H., Wu, X. Mission Reliability Simulation of Time Redundancy PMS with Multiple Missions // In: 12th International Conference on Reliability, Maintainability, and Safety (ICRMS), 2018. P. 124-129.
146. Yu, S.-Z. Hidden semi-Markov models // Artificial Intelligence, Vol. 174 (2), 2010. P. 215–243.
147. Yu, S.-Z. Hidden Semi-Markov Models: Theory, Algorithms and Applications // S.-Z. Yu. – Elsevier Science, 2015. 208 p.
148. Yu, S.-Z., Kobayashi, H. Practical Implementation of an Efficient Forward-Backward Algorithm for an Explicit-Duration Hidden Markov Model // IEEE Trans. Signal Process, Vol. 54 (5), 2006. P. 1947-1951.
149. Zucchini, W., MacDonald, I.L., Langrock, R. Hidden Markov Models for Time Series: An Introduction Using R, 2nd Edition // W. Zucchini, I.L. MacDonald, R. Langrock. – Chapman and Hall/CRC, 2016. 370 p.

Приложение А.
Краткие сведения из теории полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний

Приведем определения и положения теории ПМ процессов с общим фазовым пространством состояний, которые будут использованы в работе [18, 20, 101].

Определение. Полумарковским ядром (ПМ – ядром) в измеримом пространстве (E, B) называется функция $Q(t, x, B)$, удовлетворяющая условиям:

1) $Q(t, x, B)$ – неубывающие, непрерывные справа функции по $t \geq 0,\ Q(0, x, B) = 0,\ \ x \in E,\ \ B \in \mathrm{B}$;

2) $Q(t, x, B)$ при фиксированном $t > 0$ является полустохастическим ядром: $Q(t, x, B) \leq 1$;

3) $Q(+\infty, x, B)$ является стохастическим ядром по $x, B,$ т.е. $Q(+\infty, x, E) \equiv 1$.

Для задания полумарковских процессов используются процессы марковского восстановления.

Определение. Процессом марковского восстановления (ПВМ) называется двухмерная цепь Маркова $\{\xi_n,\ \theta_n; n \geq 0\}$ со значениями в $E \times [0, \infty)$, вероятности перехода которой определяются равенством:

$$P\{\xi_{n+1} \in B,\ \theta_{n+1} \leq t \,/\, \xi_n = x\} = Q(t, x, B),$$

где $Q(t, x, B)$ – ПМ-ядро в (E, B).

Первая компонента $\{\xi_n; n \geq 0\}$ ПМВ $\{\xi_n,\ \theta_n; n \geq 0\}$ является цепью Маркова, переходные вероятности которой определяются через ПМ-ядро $Q(t, x, B)$ равенством:

$$P(x, B) = P\{\xi_{n+1} \in B \ \,/\, \xi_n = x\} = Q(+\infty, x, B),$$

она называется вложенной цепью Маркова (ВЦМ) ПМВ $\{\xi_n, \theta_n; n \geq 0\}$. СВ $\theta_n, n \geq 0,$ составляющие вторую компоненту ПМВ $\{\xi_n, \theta_n; n \geq 0\}$, определяют интервалы между моментами марковского восстановления τ_n :

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k \;\; n \geq 1, \; \tau_0 = 0.$$

Рассмотрим считающий процесс $\nu(t) : \nu(t) = \sup\{n : \tau_n \leq t\}$, процесс $\nu(t)$ считает число моментов марковского восстановления на отрезке $[0, t]$.

Определение. Процесс $\xi(t) = \xi_{\nu(t)}$ называется полумарковским процессом (ПМП), соответствующим ПМВ $\{\xi_n, \theta_n; n \geq 0\}$.

Из определения следует, что ПМП является скачкообразным процессом, траектории которого непрерывны справа: $\xi(t+0) = \xi(t)$.

Другим способом задания ПМП является следующий: задаются

1) стохастическое ядро

$$P(x, B) = P\{\xi_{n+1} \in B \;\; / \xi_n = x\}, \; x \in E, \; B \in \mathrm{B};$$

2) ФР времен пребывания на переходах ВЦМ $\{\xi_n, ; n \geq 0\}$

$$G(t, x, y) = G_{xy}(t) = P\{\theta_{n+1} \leq t \;\; / \xi_n = x, \xi_{n+1} = y\}.$$

Тогда ПМ-ядро $Q(t, x, B)$ определяется по формуле

$$Q(t, x, B) = \int_B G(t, x, y) P(x, dy).$$

Приведем определения и формулы для основных надежностных характеристик восстанавливаемых систем, описываемых ПМП.

Пусть некоторая система S описывается ПМП $\xi(t)$ с фазовым пространством (X, B). Предположим, что множество состояний ПМП $\xi(t)$ представлено в виде:

$$E = E_+ \bigcup E_-, \;\; E_+ \bigcap E_- = 0, \;\; E_+ \in \mathrm{B}, \; E_- \in \mathrm{B},$$

где E_+ интерпретируется как множество работоспособных состояний системы S, а E_- – множество отказовых состояний системы.

Определение. Стационарным коэффициентом готовности $K_Г$ системы S называется число, определяемое равенством

$$K_Г = \lim_{t\to\infty} P\{\xi(t) \in E_+ / \xi(0) = x\},$$

в предположении, что предел существует и не зависит от начального состояния $x \in E$.

Часто используются следующие характеристики восстанавливаемых систем:

а) наработка на отказ системы T_+ (среднее стационарное время безотказной работы системы),

б) среднее стационарное время восстановления системы T_-.

Стационарное распределение $\rho(\cdot)$ ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\rho(B) = \int_E \rho(dx) P(x, B), \ B \in \text{B}. \tag{A.1}$$

Известно [20], что если существует единственное стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$ ПМП $\xi(t)$, описывающего функционирование системы S, то при некоторых предположениях характеристики $K_Г, T_+, T_-$ находятся по формулам:

$$T_+ = \frac{\int_{E_+} m(x)\rho(dx)}{\int_{E_+} P(x, E_-)\rho(dx)}, \tag{A.2}$$

$$T_- = \frac{\int_{E_-} m(x)\rho(dx)}{\int_{E_+} P(x, E_-)\rho(dx)}, \tag{A.3}$$

$$K_Г = \frac{\int_{E_+} m(x)\rho(dx)}{\int_{E} m(x)\rho(dx)}, \tag{A.4}$$

где $\rho(\cdot)$ – стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$, $m(x)$ – среднее время пребывания в состоянии $x \in E$. Отметим, что характеристики K_Γ, T_+, T_- связаны соотношением:

$$K_\Gamma = \frac{T_+}{T_+ + T_-}. \tag{A.5}$$

В работе также будет использоваться приближенный метод вычисления стационарных характеристик надежности систем, разработанный в [18].

Пусть функционирование реальной, исходной системы S описывается ПМП $\xi(t)$ с фазовым пространством (E, B)., причем множество состояний X разбито на два подмножества E_+ и E_- так, что $E = E_+ \bigcup E_-$, $E_+ \bigcap E_- = 0$. Предположим, что ядро ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$ ПМП $\xi(t)$ близко к ядру ВЦМ $\{\xi_n^{(0)}; n \geq 0\}$ опорной системы S_0 с единственным стационарным распределением $\rho(\cdot)$.

Тогда вместо формул (А.2) и (А.3) для приближенного вычисления стационарных характеристик реальной системы S можно использовать следующие:

$$T_+ \approx \frac{\int\limits_{E_+} m(x)\rho(dx)}{\int\limits_{E_+} \rho(dx) P^{(r)}(x, E_-)}, \quad T_- \approx \frac{\int\limits_{E} \rho(dx) \int\limits_{E_-} m(y) P^{(r)}(x, dy)}{\int\limits_{E_+} \rho(dx) P^{(r)}(x, E_-)}, \tag{A.6}$$

где $\rho(dx)-$ стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n^{(0)}, n \geq 0\}$ опорной системы; $m(x)-$ средние времена пребывания в состояниях исходной системы, $P^{(r)}(x, E_-)-$ вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$ исходной системы из работоспособных состояний в отказовые по минимальной траектории; $r-$ минимальное число шагов, за которые исходная система может перейти во множество отказовых состояний E_- из состояний, принадлежащих E_+ и входящих в эргодический класс E_0 опорной системы.

Одними из основных стационарных экономических показателей эффективности функционирования системы являются: S – средний удельный доход, приходящийся на единицу календарного времени и C – средние удельные

затраты, приходящиеся на единицу времени исправного функционирования системы. Эти показатели в рамках полумарковской модели определяются формулами [16, 15]

$$S = \frac{\int\limits_{E} m(x) f_S(x) \rho(dx)}{\int\limits_{E} m(x) \rho(dx)}, \tag{A.7}$$

$$C = \frac{\int\limits_{E} m(x) f_C(x) \rho(dx)}{\int\limits_{E_+} m(x) \rho(dx)}, \tag{A.8}$$

где $f_S(x)$ и $f_C(x)$ – функции, определяющие соответственно доход и затраты в каждом состоянии.

Приложение Б.

Решение системы интегральных уравнений (1.2)

Запишем систему интегральных уравнений (1.2).

$$\begin{cases} \rho_0 = \rho(1) = \rho(\omega) = \overline{G}(\tau)\int\limits_0^\infty \rho(20y)dy, \\ \rho(10x) = \rho_0\int\limits_0^\infty f_2(x+t)\,f_1(t)dt + \int\limits_x^\infty \rho(10y)\,f_1(y-x)dy + G(\tau)\int\limits_0^\infty f_2(x+y)\rho(20y)dy, \\ \rho(11x) = \rho(10x), \\ \rho(20x) = \rho_0\int\limits_0^\infty f_1(x+t)\,f_2(t)dt + \int\limits_0^\infty f_1(x+y)\rho(10y)dy + G(\tau)\int\limits_x^\infty f_2(y-x)\rho(20y)dy, \\ \rho(21x) = G(\tau)\rho(20x), \\ \rho(1) + \rho(\omega) + \int\limits_0^\infty (\rho(10x) + \rho(11x) + \rho(20x) + \rho(21x))dx = 1. \end{cases} \qquad (Б.1)$$

От системы (Б.1) перейдем к системе интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \rho(10x) = \rho_0\int\limits_0^\infty f_2(x+t)\,f_1(t)dt + \int\limits_x^\infty \rho(10y)\,f_1(y-x)dy + G(\tau)\int\limits_0^\infty f_2(x+y)\rho(20y)dy, \\ \rho(20x) = \rho_0\int\limits_0^\infty f_1(x+t)\,f_2(t)dt + \int\limits_0^\infty f_1(x+y)\rho(10y)dy + G(\tau)\int\limits_x^\infty f_2(y-x)\rho(20y)dy. \end{cases} \qquad (Б.2)$$

Введем обозначения $\rho(10x) = \varphi_1(x)$, $\rho(20x) = \varphi_2(x)$.

Получим:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \rho_0\int\limits_0^\infty f_2(x+t)\,f_1(t)dt + \int\limits_x^\infty \varphi_1(y)\,f_1(y-x)dy + G(\tau)\int\limits_0^\infty f_2(x+y)\varphi_2(y)dy, \\ \varphi_2(x) = \rho_0\int\limits_0^\infty f_1(x+t)\,f_2(t)dt + \int\limits_0^\infty f_1(x+y)\varphi_1(y)dy + G(\tau)\int\limits_x^\infty f_2(y-x)\varphi_2(y)dy. \end{cases} \qquad (Б.3)$$

Введем операторы:

$$\left[A_{f_1}\varphi\right](x) = \int\limits_x^\infty f_1(y-x)\varphi(y)dy,\ \left[A_{f_2}\varphi\right](x) = \int\limits_x^\infty f_2(y-x)\varphi(y)dy,$$

$$\left[\overline{A}_{f_1}\varphi\right](x) = \int\limits_0^\infty f_1(y+x)\varphi(y)dy,\ \left[\overline{A}_{f_2}\varphi\right](x) = \int\limits_0^\infty f_2(y+x)\varphi(y)dy.$$

Тогда система (Б.3) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \rho_0 \bar{A}_{f_2} f_1 + A_{f_1}\varphi_1 + G(\tau)\bar{A}_{f_2}\varphi_2, \\ \varphi_2 = \rho_0 \bar{A}_{f_1} f_2 + \bar{A}_{f_1}\varphi_1 + G(\tau)A_{f_2}\varphi_2. \end{cases} \qquad (Б.4)$$

Из первого уравнения (Б.4) найдем φ_1:

$$\varphi_1 - A_{f_1}\varphi_1 = \rho_0 \bar{A}_{f_2} f_1 + G(\tau)\bar{A}_{f_2}\varphi_2,$$

$$\left(I - A_{f_1}\right)\varphi_1 = \rho_0 \bar{A}_{f_2} f_1 + G(\tau)\bar{A}_{f_2}\varphi_2,$$

$$\varphi_1 = \rho_0 \left(I - A_{f_1}\right)^{-1} \bar{A}_{f_2} f_1 + G(\tau)\left(I - A_{f_1}\right)^{-1} \bar{A}_{f_2}\varphi_2.$$

$\left(I - A_{f_1}\right)^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} A_{f_1}^n$, тогда

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \rho_0 \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_{f_1}^n \right) \bar{A}_{f_2} f_1 + G(\tau)\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} A_{f_1}^n \right) \bar{A}_{f_2}\varphi_2 = \\ &= \rho_0 \bar{A}_{f_2} f_1 + \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_{f_1}^n \bar{A}_{f_2} f_1 + G(\tau)\bar{A}_{f_2}\varphi_2 + G(\tau)\sum_{n=1}^{\infty} A_{f_1}^n \bar{A}_{f_2}\varphi_2. \end{aligned} \qquad (Б.5)$$

Упростим слагаемые, входящие в (Б.5).

1. $\rho_0 \bar{A}_{f_2} f_1 = \rho_0 \int_0^{\infty} f_2(x+y) f_1(y) dy.$

2. $$\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_{f_1}^n \bar{A}_{f_2} f_1 = \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_2(x+y) dy \int_0^{y} f_1^{*(n)}(y-t) f_1(t) dt =$$

$$= \rho_0 \int_0^{\infty} f_2(x+y) dy \int_0^{y} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_1^{*(n)}(y-t) \right) f_1(t) dt =$$

$$= \rho_0 \int_0^{\infty} f_2(x+y) dy \int_0^{y} h_{f_1}(y-t) f_1(t) dt,$$

где $h_{f_1}(y-t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_1^{*(n)}(y-t)$ – n-кратная свертка f_1.

Сложим первое и второе слагаемые (Б.5):

$$\rho_0\int_0^\infty f_2(x+y)\,f_1(y)dy+\rho_0\int_0^\infty f_2(x+y)dy\int_0^y h_{f_1}(y-t)\,f_1(t)dt=$$
$$=\rho_0\int_0^\infty f_2(x+y)dy\left[\,f_1(y)+\int_0^y h_{f_1}(y-t)\,f_1(t)dt\,\right]=\rho_0\int_0^\infty f_2(x+y)h_{f_1}(y)dy. \qquad (Б.6)$$

3. $G(\tau)\bar{A}_{f_2}\varphi_2=G(\tau)\int_0^\infty f_2(x+y)\varphi_2(y)dy.$

4. $G(\tau)\sum_{n=1}^\infty A_{f_1}^n\bar{A}_{f_2}\varphi_2=G(\tau)\int_x^\infty h_{f_1}(y-x)dy\int_0^\infty f_2(y+t)\varphi_2(t)dt=$

$$=G(\tau)\int_0^\infty\varphi_2(t)dt\int_x^\infty h_{f_1}(y-x)\,f_2(y+t)dy.$$

Сложим третье и четвертое слагаемые (Б.5):

$$G(\tau)\int_0^\infty f_2(x+y)\varphi_2(y)dy+G(\tau)\int_0^\infty\varphi_2(t)dt\int_x^\infty h_{f_1}(y-x)\,f_2(y+t)dy=$$
$$=G(\tau)\int_0^\infty\varphi_2(t)dt\left[\,f_2(x+t)+\int_x^\infty h_{f_1}(y-x)\,f_2(y+t)dy\,\right]=\begin{vmatrix}y-x=y'\\ y=y'+x\end{vmatrix}= \qquad (Б.7)$$
$$=G(\tau)\int_0^\infty\varphi_2(t)dt\left[\,f_2(x+t)+\int_0^\infty h_{f_1}(y)\,f_2(y+x+t)dy\,\right].$$

Введем функцию $\gamma_2(x,t)=f_2(x+t)+\int_0^\infty h_{f_1}(y)\,f_2(y+x+t)dy$ и оператор $\left[\Gamma_2\varphi\right](x)=\int_0^\infty\gamma_2(x,t)\varphi(t)dt.$

Тогда (Б.5), как сумма (Б.6) и (Б.7) будет иметь вид:

$$\varphi_1=\rho_0\int_0^\infty f_2(x+y)h_{f_1}(y)dy+G(\tau)\int_0^\infty\gamma_2(x,t)\varphi_2(t)dt=$$
$$=\rho_0\int_0^\infty f_2(x+y)h_{f_1}(y)dy+G(\tau)\Gamma_2\varphi_2. \qquad (Б.8)$$

Выразим из второго уравнения системы (Б.4) φ_2:

$$\varphi_2-G(\tau)A_{f_2}\varphi_2=\rho_0\bar{A}_{f_1}f_2+\bar{A}_{f_1}\varphi_1,$$

$$\left(I - G(\tau)A_{f_2}\right)\varphi_2 = \rho_0 \overline{A}_{f_1} f_2 + \overline{A}_{f_1}\varphi_1,$$

$$\varphi_2 = \rho_0 \left(I - G(\tau)A_{f_2}\right)^{-1} \overline{A}_{f_1} f_2 + \left(I - G(\tau)A_{f_2}\right)^{-1} \overline{A}_{f_1}\varphi_1.$$

$$\left(I - G(\tau)A_{f_2}\right)^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty}\left(G(\tau)A_{f_2}\right)^n.$$

Вычислим

$$\left(G(\tau)A_{f_2}\varphi\right)^2(x) = G^2(\tau)\int_x^{\infty} f_2(y-x)\varphi(y)dy\int_x^{\infty} f_2(y-x)\varphi(y)dy =$$

$$= \int_x^{\infty}\left(G(\tau) f_2\right)^{*(2)}(y-x)\varphi(y)dy.$$

Следовательно,

$$\left(G(\tau)A_{f_2}\varphi\right)^n(x) = \int_x^{\infty}\left(G(\tau) f_2\right)^{*(n)}(y-x)\varphi(y)dy.$$

Введем $h_{f_2}^{(\tau)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(G(\tau) f_2\right)^{*(n)}(x)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \rho_0 \overline{A}_{f_1} f_2 + \rho_0 \int_x^{\infty} h_{f_2}^{(\tau)}(y-x)dy\int_0^{\infty} f_1(y+t) f_2(t)dt + \overline{A}_{f_1}\varphi_1 + \\
&+ \int_x^{\infty} h_{f_2}^{(\tau)}(y-x)dy\int_0^{\infty} f_1(y+t)\varphi_1(t)dt = \\
&= \rho_0 \int_0^{\infty} f_1(x+y) f_2(y)dy + \rho_0 \int_x^{\infty} h_{f_2}^{(\tau)}(y-x)dy\int_0^{\infty} f_1(y+t) f_2(t)dt + \\
&+ \int_0^{\infty} f_1(x+t)\varphi_1(t)dt + \int_x^{\infty} h_{f_2}^{(\tau)}(y-x)dy\int_0^{\infty} f_1(y+t)\varphi_1(t)dt.
\end{aligned} \tag{Б.9}$$

Упростим (Б.9). Запишем первое слагаемое формулы (Б.9) в виде

$$\rho_0 \int_0^{\infty} f_1(x+y) f_2(y)dy = \rho_0 \frac{1}{G(\tau)}\int_0^{\infty} f_1(x+t)\left(G(\tau) f_2(t)\right)dt. \tag{Б.10}$$

Второе слагаемое (Б.9) равно

$$\rho_0\int_x^\infty h_{f_2}^{(\tau)}(y-x)dy\int_0^\infty f_1(y+t)\,f_2(t)dt=$$

$$=\rho_0\int_x^\infty\sum_{n=2}^\infty\left(G(\tau)\,f_2\right)^{*(n)}(y-x)dy\int_0^\infty f_1(y+t)\,f_2(t)dt=$$

$$=\rho_0\int_x^\infty\sum_{n=2}^\infty\left(G(\tau)\,f_2\right)^{*(n)}(y-x)dy\int_0^\infty\frac{1}{G(\tau)}\,f_1(y+t)\left(G(\tau)\,f_2(t)\right)dt= \qquad (Б.11)$$

$$=\rho_0\frac{1}{G(\tau)}\int_0^\infty f_1(x+t)dt\int_0^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(G(\tau)\,f_2\right)^{*(n)}(y-x)dy.$$

Сложим (Б.10) и (Б.11):

$$\rho_0\frac{1}{G(\tau)}\int_0^\infty f_1(x+t)\left(G(\tau)\,f_2(t)\right)dt+\rho_0\frac{1}{G(\tau)}\int_0^\infty f_1(x+t)dt\int_0^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(G(\tau)\,f_2\right)^{*(n)}(y-x)dy=$$

$$=\rho_0\frac{1}{G(\tau)}\int_0^\infty f_1(x+t)dt\left[G(\tau)\,f_2(t)+\int_0^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(G(\tau)\,f_2\right)^{*(n)}(y-x)dy\right]= \qquad (Б.12)$$

$$=\rho_0\frac{1}{G(\tau)}\int_0^\infty f_1(x+t)h_{f_2}^{(\tau)}(t)dt,$$

где $h_{f_2}^{(\tau)}(t)=G(\tau)\,f_2(t)+\int_0^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(G(\tau)\,f_2\right)^{*(n)}(y-x)dy$.

Сложим третье и четвертое слагаемые формулы (Б.9):

$$\int_0^\infty f_1(x+t)\varphi_1(t)dt+\int_x^\infty h_{f_2}^{(\tau)}(y-x)dy\int_0^\infty f_1(y+t)\varphi_1(t)dt=$$

$$=\int_0^\infty\varphi_1(t)dt\left[f_1(x+t)+\int_x^\infty h_{f_2}^{(\tau)}(y-x)\,f_1(y+t)dy\right]=\begin{vmatrix}y-x=y'\\ y=y'+x\end{vmatrix}= \qquad (Б.13)$$

$$=\int_0^\infty\varphi_1(t)dt\left[f_1(x+t)+\int_0^\infty h_{f_2}^{(\tau)}(y)\,f_1(y+x+t)dy\right]=$$

$$=\int_0^\infty\gamma_1^{(\tau)}(x,t)\varphi_1(t)dt,$$

где $\gamma_1^{(\tau)}(x,t)=f_1(x+t)+\int_0^\infty h_{f_2}^{(\tau)}(y)\,f_1(y+x+t)dy$.

Введем оператор $\left[\Gamma_1^{(\tau)}\varphi\right](x)=\int\limits_0^\infty \gamma_1^{(\tau)}(x,t)\varphi(t)dt.$

Тогда, складывая (Б.12) и (Б.13), получим выражение для φ_2:

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \rho_0\frac{1}{G(\tau)}\int\limits_0^\infty f_1(x+t)h_{f_2}^{(\tau)}(t)dt+\int\limits_0^\infty \gamma_1^{(\tau)}(x,t)\varphi_1(t)dt = \\ &= \rho_0\frac{1}{G(\tau)}\int\limits_0^\infty f_1(x+t)h_{f_2}^{(\tau)}(t)dt+\Gamma_1^{(\tau)}\varphi_1.\end{aligned} \tag{Б.14}$$

Тогда получим систему:

$$\begin{cases}\varphi_1=\rho_0\int\limits_0^\infty f_2(x+t)h_{f_1}(t)dt+G(\tau)\Gamma_2\varphi_2,\\ \varphi_2=\rho_0\frac{1}{G(\tau)}\int\limits_0^\infty f_1(x+t)h_{f_2}^{(\tau)}(t)dt+\Gamma_1^{(\tau)}\varphi_1.\end{cases} \tag{Б.15}$$

Подставим φ_2 из второго уравнения системы (Б.15) в первое уравнение (Б.15).

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \rho_0\int\limits_0^\infty f_2(x+t)h_{f_1}(t)dt+G(\tau)\Gamma_2\left[\rho_0\frac{1}{G(\tau)}\int\limits_0^\infty f_1(x+t)h_{f_2}^{(\tau)}(t)dt+\Gamma_1^{(\tau)}\varphi_1\right]= \\ &= \rho_0\int\limits_0^\infty f_2(x+t)h_{f_1}(t)dt+\rho_0\int\limits_0^\infty \gamma_2(x,t)dt\int\limits_0^\infty f_1(y+t)h_{f_2}^{(\tau)}(y)dy+G(\tau)\Gamma_2\Gamma_1^{(\tau)}\varphi_1= \\ &= \rho_0\int\limits_0^\infty f_2(x+t)h_{f_1}(t)dt+\rho_0\int\limits_0^\infty \gamma_2(x,t)dt\int\limits_0^\infty f_1(y+t)h_{f_2}^{(\tau)}(y)dy+ \\ &\quad +G(\tau)\int\limits_0^\infty \gamma_2(x,t)dt\int\limits_0^\infty \gamma_1^{(\tau)}(y,t)\varphi_1(y)dy.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \rho_0\int\limits_0^\infty f_2(x+t)h_{f_1}(t)dt+\rho_0\int\limits_0^\infty \gamma_2(x,t)dt\int\limits_0^\infty f_1(y+t)h_{f_2}^{(\tau)}(y)dy+ \\ &\quad +G(\tau)\int\limits_0^\infty \varphi_1(y)dy\int\limits_0^\infty \gamma_2(x,t)\gamma_1^{(\tau)}(t,y)dt.\end{aligned} \tag{Б.16}$$

Введем функцию $k_1(x,y)=G(\tau)\int\limits_0^\infty \gamma_2(x,t)\gamma_1^{(\tau)}(t,y)dt$. Тогда

$$\varphi_1 = \rho_0 \int_0^\infty f_2(x+t) h_{f_1}(t) dt + \rho_0 \int_0^\infty \gamma_2(x,t) dt \int_0^\infty f_1(y+t) h_{f_2}^{(\tau)}(y) dy + \int_0^\infty k_1(x,y) \varphi_1(y) dy,$$

$$\left[K_1 \varphi\right](x) = \int_0^\infty k_1(x,y) \varphi(y) dy,$$

$$\left(I - K_1\right) \varphi_1 = \rho_0 \int_0^\infty f_2(x+t) h_{f_1}(t) dt + \rho_0 \int_0^\infty \gamma_2(x,t) dt \int_0^\infty f_1(y+t) h_{f_2}^{(\tau)}(y) dy,$$

$$\varphi_1 = \rho_0 \left(I - K_1\right)^{-1} \int_0^\infty f_2(x+t) h_{f_1}(t) dt + \rho_0 \left(I - K_1\right)^{-1} \int_0^\infty \gamma_2(x,t) dt \int_0^\infty f_1(y+t) h_{f_2}^{(\tau)}(y) dy,$$

$$\left(I - K_1\right)^{-1} = I + \sum_{n=1}^\infty K_1^n, \ \pi_1(x,y) = \sum_{n=1}^\infty K_1^{*(n)}(x,y),$$

$$\left(\sum_{n=1}^\infty K_1^{*(n)} \varphi\right)(x) = \int_0^\infty \pi_1(x,y) \varphi(y) dy.$$

Получим

$$\begin{aligned} \varphi_1 = {} & \rho_0 \int_0^\infty f_2(x+t) h_{f_1}(t) dt + \rho_0 \int_0^\infty \pi_1(x,y) dy \int_0^\infty f_2(y+t) h_{f_1}(t) dt + \\ & + \rho_0 \int_0^\infty \gamma_2(x,t) dt \int_0^\infty f_1(y+t) h_{f_2}^{(\tau)}(y) dy + \\ & + \rho_0 \int_0^\infty \pi_1(x,y) dy \int_0^\infty \gamma_2(y,t) dt \int_0^\infty f_1(t+z) h_{f_2}^{(\tau)}(z) dz. \end{aligned} \qquad (Б.17)$$

Аналогично, подставим φ_1 из первого уравнения системы (Б.15) во второе.

$$\varphi_2 = \rho_0 \frac{1}{G(\tau)} \int_0^\infty f_1(x+t) h_{f_2}^{(\tau)}(t) dt + \Gamma_1^{(\tau)} \left[\rho_0 \int_0^\infty f_2(x+t) h_{f_1}(t) dt + G(\tau) \Gamma_2 \varphi_2 \right] =$$

$$= \rho_0 \frac{1}{G(\tau)} \int_0^\infty f_1(x+t) h_{f_2}^{(\tau)}(t) dt + \rho_0 \int_0^\infty \gamma_1^{(\tau)}(x,t) dt \int_0^\infty f_2(y+t) h_{f_1}(y) dy + G(\tau) \Gamma_1^{(\tau)} \Gamma_2 \varphi_2,$$

$$G(\tau) \Gamma_1^{(\tau)} \Gamma_2 \varphi_2 = G(\tau) \int_0^\infty \gamma_1^{(\tau)}(x,t) dt \int_0^\infty \gamma_2(y,t) \varphi_2(y) dy = G(\tau) \int_0^\infty \varphi_2(y) dy \int_0^\infty \gamma_1^{(\tau)}(x,t) \gamma_2(t,y) dt.$$

Введем

$$k_2(x,y) = G(\tau) \int_0^\infty \gamma_1^{(\tau)}(x,t) \gamma_2(t,y) dt, \ \left[K_2 \varphi\right](x) = \int_0^\infty k_2(x,y) \varphi(y) dy,$$

$$\pi_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}K_2^{*(n)}(x,y),\ \left(\sum_{n=1}^{\infty}K_2^{*(n)}\varphi\right)(x)=\int_0^{\infty}\pi_2(x,y)\varphi(y)dy\,.$$

Получим

$$\varphi_2=\rho_0\frac{1}{G(\tau)}\int_0^{\infty}f_1(x+t)h_{f_2}^{(\tau)}(t)dt+\rho_0\int_0^{\infty}\gamma_1^{(\tau)}(x,t)dt\int_0^{\infty}f_2(y+t)h_{f_1}(y)dy+K_2\varphi_2,$$

$$\left(I-K_2\right)\varphi_2=\rho_0\frac{1}{G(\tau)}\int_0^{\infty}f_1(x+t)h_{f_2}^{(\tau)}(t)dt+\rho_0\int_0^{\infty}\gamma_1^{(\tau)}(x,t)dt\int_0^{\infty}f_2(y+t)h_{f_1}(y)dy,$$

$$\varphi_2=\rho_0\frac{1}{G(\tau)}\left(I-K_2\right)^{-1}\int_0^{\infty}f_1(x+t)h_{f_2}^{(\tau)}(t)dt+\rho_0\left(I-K_2\right)^{-1}\int_0^{\infty}\gamma_1^{(\tau)}(x,t)dt\int_0^{\infty}f_2(y+t)h_{f_1}(y)dy\,.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\varphi_2=&\rho_0\frac{1}{G(\tau)}\int_0^{\infty}f_1(x+t)h_{f_2}^{(\tau)}(t)dt+\rho_0\frac{1}{G(\tau)}\int_0^{\infty}\pi_2(x,y)dy\int_0^{\infty}f_1(y+t)h_{f_2}^{(\tau)}(t)dt+\\&+\rho_0\int_0^{\infty}\gamma_1^{(\tau)}(x,t)dt\int_0^{\infty}f_2(y+t)h_{f_1}(y)dy+\\&+\rho_0\int_0^{\infty}\pi_2(x,y)dy\int_0^{\infty}\gamma_1^{(\tau)}(y,t)dt\int_0^{\infty}f_2(t+z)h_{f_1}(z)dz.\end{aligned}\qquad(\text{Б.18})$$

Приложение В.

Решение системы интегральных уравнений (1.11)

Запишем систему интегральных уравнений (1.11).

$$\begin{cases} \rho_0 = \int\limits_0^\infty \varphi_5(x)dx, \\ \varphi_1(x) = \rho_0 \int\limits_0^\infty f_2(x+t)\, f_1(t)dt + \int\limits_x^\infty \varphi_1(y)\, f_1(y-x)dy + \int\limits_0^\infty \varphi_3(y)\, f_2(x+y)dy, \\ \varphi_2(x) = \rho_0 \int\limits_0^\infty f_1(x+t)\, f_2(t)dt + \int\limits_0^\infty \varphi_1(y)\, f_1(x+y)dy + \int\limits_x^\infty \varphi_3(y)\, f_2(y-x)dy, \\ \varphi_3(x) = \int\limits_x^\infty \varphi_2(y) g(y-x)\bar{R}(y-x)dy + \int\limits_0^\infty f_1(x+y)dy \int\limits_y^\infty \varphi_4(y,z)dz, \\ \varphi_4(x,z) = \int\limits_0^\infty \varphi_4(x+t, z+t)\, f_1(t)dt + \int\limits_0^\infty \varphi_2(y) g(y+x) r(y+z)dy, \\ \varphi_5(x) = \int\limits_0^\infty \varphi_2(y)dy \int\limits_0^y g(x+t) r(t)dt + \int\limits_0^\infty \varphi_4(x+t,t)\bar{F}_1(t)dt, \\ + \textit{условие нормировки}. \end{cases} \tag{B.1}$$

Найдем решение системы (В.1).

Введем оператор:

$$\left(A_{f_1}\varphi\right)(x,z) = \int\limits_0^\infty \varphi(x+t, z+t)\, f_1(t)dt\,,$$

тогда 5-ое уравнение системы (В.1) запишется в виде:

$$\varphi_4 = A_{f_1}\varphi_4 + \int\limits_0^\infty \varphi_2(y) g(y+x) r(y+z)dy\,.$$

Решим его методом последовательных приближений.

$$(I - A_{f_1})\varphi_4 = \int\limits_0^\infty \varphi_2(y) g(y+x) r(y+z)dy\,,$$

$$\varphi_4 = (I - A_{f_1})^{-1}(\int\limits_0^\infty \varphi_2(y) g(y+x) r(y+z)dy)\,,$$

$$(I - A_{f_1})^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} A_{f_1}^n, \quad (\sum_{n=1}^{\infty} A_{f_1}^n)\varphi = \int_0^{\infty} \varphi(x+t, z+t) h_{f_1}(t)dt,$$

где $h_{f_1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_1^{*(n)}(t)$ – плотность функции восстановления $H_{f_1}(t)$ процесса восстановления, порожденного СВ α_1.

Введем функцию $v(t,x) = f(t+x) + \int_0^t f(t+x-u)h(u)du$.

Следовательно,

$$\varphi_4(x,z) = \int_0^{\infty} \varphi_2(y)g(y+x)r(y+z)dy + \int_0^{\infty} h_{f_1}(t)dt \int_0^{\infty} \varphi_2(y)g(y+x+t)r(y+z+t)dy =$$
$$= \int_0^{\infty} \varphi_2(y)g(y+x)r(y+z)dy + \int_0^{\infty} \varphi_2(y)dy \int_0^{\infty} g(y+x+t)r(y+z+t)h_{f_1}(t)dt. \tag{B.2}$$

$$\varphi_4(y,z) = \int_0^{\infty} \varphi_2(t)g(t+y)r(t+z)dt + \int_0^{\infty} \varphi_2(s)ds \int_0^{\infty} g(s+y+t)r(s+z+t)h_{f_1}(t)dt,$$

тогда

$$\int_y^{\infty} \varphi_4(y,z)dz = \int_y^{\infty} dz \int_0^{\infty} \varphi_2(t)g(t+y)r(t+z)dt +$$
$$+ \int_y^{\infty} dz \int_0^{\infty} \varphi_2(s)ds \int_0^{\infty} g(s+y+t)r(s+z+t)h_{f_1}(t)dt =$$
$$= \int_0^{\infty} \varphi_2(t)g(t+y)dt \int_y^{\infty} r(t+z)dz + \int_0^{\infty} \varphi_2(s)ds \int_0^{\infty} g(y+s+t)h_{f_1}(t)dt \int_y^{\infty} r(s+z+t)dz = \tag{B.3}$$
$$= \int_0^{\infty} \varphi_2(t)g(t+y)\bar{R}(t+y)dt + \int_0^{\infty} \varphi_2(s)ds \int_0^{\infty} g(y+s+t)\bar{R}(y+s+t)h_{f_1}(t)dt =$$
$$= \int_0^{\infty} \varphi_2(t)\bar{R}(t+y)g(t+y)dt + \int_0^{\infty} \varphi_2(s)ds \int_0^{\infty} \bar{R}(y+s+t)g(y+s+t)h_{f_1}(t)dt.$$

Подставляя (B.3) в 4-е уравнение системы (B.1), получаем

$$\varphi_3(x) = \int_x^{\infty} \bar{R}(y-x)g(y-x)\varphi_2(y)dy + \int_0^{\infty} f_1(x+y)dy \int_0^{\infty} \varphi_2(t)\bar{R}(y+t)g(y+t)dt +$$
$$+ \int_0^{\infty} f_1(x+y)dy \int_0^{\infty} \varphi_2(s)ds \int_0^{\infty} \bar{R}(y+s+t)g(y+s+t)h_{f_1}(t)dt. \tag{B.4}$$

Преобразуем третье слагаемое в полученном выражении (В.4) для $\varphi_3(x)$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty f_1(x+y)dy\int_0^\infty \varphi_2(s)ds\int_0^\infty \bar{R}(y+s+t)g(y+s+t)h_{f_1}(t)dt = \\
&= \int_0^\infty \varphi_2(s)ds\int_0^\infty f_1(x+y)dy\int_0^\infty \bar{R}(y+s+t)g(y+s+t)h_{f_1}(t)dt = \\
&= \int_0^\infty \varphi_2(s)ds\int_0^\infty f_1(x+y)dy\int_y^\infty \bar{R}(s+t)g(s+t)h_{f_1}(t-y)dt = \\
&= \int_0^\infty \varphi_2(s)ds\int_0^\infty \bar{R}(s+t)g(s+t)dt\int_0^t f_1(x+t-y)h_{f_1}(y)dy.
\end{aligned} \tag{В.5}$$

Сложим второе слагаемое выражения (В.4) с (В.5):

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty f_1(x+y)dy\int_0^\infty \varphi_2(t)\bar{R}(y+t)g(y+t)dt + \\
&\qquad + \int_0^\infty \varphi_2(s)ds\int_0^\infty \bar{R}(s+t)g(s+t)dt\int_0^t f_1(x+t-y)h_{f_1}(y)dy = \\
&= \int_0^\infty \varphi_2(t)dt\int_0^\infty f_1(x+y)\bar{R}(y+t)g(y+t)dy + \\
&\qquad + \int_0^\infty \varphi_2(s)ds\int_0^\infty \bar{R}(s+t)g(s+t)dt\int_0^t f_1(x+t-y)h_{f_1}(y)dy = \\
&= \int_0^\infty \varphi_2(s)ds\int_0^\infty f_1(x+t)\bar{R}(s+t)g(s+t)dt + \\
&\qquad + \int_0^\infty \varphi_2(s)ds\int_0^\infty \bar{R}(s+t)g(s+t)dt\int_0^t f_1(x+t-u)h_{f_1}(u)du = \\
&= \int_0^\infty \varphi_2(s)ds\int_0^\infty \bar{R}(s+t)g(s+t)v_{f_1}(t,x)dt.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi_3(x) = \int_x^\infty \bar{R}(y-x)g(y-x)\varphi_2(y)dy + \int_0^\infty \varphi_2(y)dy\int_0^\infty \bar{R}(y+t)g(y+t)v_{f_1}(t,x)dt. \tag{В.6}$$

Рассмотрим второе уравнение системы (В.1):

$$\varphi_1(x) = \rho_0\int_0^\infty f_2(x+t)\,f_1(t)dt + \int_x^\infty \varphi_1(y)\,f_1(y-x)dy + \int_0^\infty \varphi_3(y)\,f_2(x+y)dy\,. \tag{В.7}$$

Введем оператор $\left[A_{f_1}\varphi\right](x)=\int\limits_x^\infty f_1(y-x)\varphi(y)dy,$

тогда (В.7) запишется в виде:

$$\varphi_1(x)=\rho_0\int\limits_0^\infty f_2(x+t)\,f_1(t)dt+A_{f_1}\varphi_1+\int\limits_0^\infty \varphi_3(y)\,f_2(x+y)dy,$$

$$\left(I-A_{f_1}\right)\varphi_1=\rho_0\int\limits_0^\infty f_2(x+t)\,f_1(t)dt+\int\limits_0^\infty \varphi_3(y)\,f_2(x+y)dy,$$

$$\varphi_1(x)=(I-A_{f_1})^{-1}\left[\rho_0\int\limits_0^\infty f_2(x+t)\,f_1(t)dt+\int\limits_0^\infty \varphi_3(y)\,f_2(x+y)dy\right],$$

$$(I-A_{f_1})^{-1}=I+\sum_{n=1}^\infty A_{f_1}^n\,,\ \ (\sum_{n=1}^\infty A_{f_1}^n)\varphi=\int\limits_x^\infty h_{f_1}(y-x)\varphi(y)dy\,,$$

где $h_{f_1}(x)=\sum\limits_{n=1}^\infty f_1^{*(n)}(x)$ – плотность функции восстановления $H_{f_1}(t)$ процесса восстановления, порожденного СВ α_1.

Тогда

$$\begin{aligned}\varphi_1(x)&=\rho_0\int\limits_0^\infty f_2(x+t)\,f_1(t)dt+\int\limits_0^\infty \varphi_3(y)\,f_2(x+y)dy+\\&+\rho_0\int\limits_x^\infty h_{f_1}(y-x)dy\int\limits_0^\infty f_2(y+t)\,f_1(t)dt+\int\limits_x^\infty h_{f_1}(y-x)dy\int\limits_0^\infty \varphi_3(t)\,f_2(y+t)dt.\end{aligned}\tag{В.8}$$

Преобразуем слагаемые, входящие в выражение (В.8) для $\varphi_1(x)$.

Рассмотрим третье слагаемое (В.8):

$$\begin{aligned}&\rho_0\int\limits_x^\infty h_{f_1}(y-x)dy\int\limits_0^\infty f_2(y+t)\,f_1(t)dt=\rho_0\int\limits_x^\infty h_{f_1}(y-x)dy\int\limits_y^\infty f_2(t)\,f_1(t-y)dt=\\&=\rho_0\int\limits_x^\infty f_2(t)dt\int\limits_x^t h_{f_1}(y-x)\,f_1(t-y)dy=\rho_0\int\limits_x^\infty f_2(t)dt\int\limits_0^{t-x} h_{f_1}(y)\,f_1(t-y-x)dy=\\&=\rho_0\int\limits_x^\infty f_2(t)dt\int\limits_0^{t-x} h_{f_1}(t-x-y)\,f_1(y)dy=\rho_0\int\limits_x^\infty f_2(t)dt\sum_{n=2}^\infty f_1^{*(n)}(t-x)=\\&=\rho_0\int\limits_x^\infty f_2(x+t)\sum_{n=2}^\infty f_1^{*(n)}(t)dt.\end{aligned}\tag{В.9}$$

Первое слагаемое (В.8) перепишем в виде:

$$\rho_0\int_0^\infty f_2(x+t)\,f_1(t)dt=\rho_0\int_x^\infty f_1(t-x)\,f_2(t)dt\,. \qquad (B.10)$$

Сложим (B.10) и (B.9):

$$\rho_0\int_x^\infty f_1(t-x)\,f_2(t)dt+\rho_0\int_x^\infty f_2(x+t)\sum_{n=2}^\infty f_1^{*(n)}(t)dt=\rho_0\int_0^\infty f_2(x+t)h_{f_1}(t)dt. \qquad (B.11)$$

Тогда, используя (B.11), выражение (B.8) примет вид:

$$\varphi_1(x)=\rho_0\int_0^\infty f_2(x+t)h_{f_1}(t)dt+\int_0^\infty\varphi_3(y)\,f_2(x+y)dy+\int_x^\infty h_{f_1}(y-x)dy\int_0^\infty\varphi_3(t)\,f_2(y+t)dt=$$

$$=\rho_0\int_0^\infty f_2(x+t)h_{f_1}(t)dt+\int_0^\infty\varphi_3(y)\,f_2(x+y)dy+\int_0^\infty\varphi_3(t)dt\int_x^\infty h_{f_1}(y-x)\,f_2(y+t)dy.$$

Рассмотрим третье уравнение системы (B.1):

$$\varphi_2(x)=\rho_0\int_0^\infty f_1(x+t)\,f_2(t)dt+\int_0^\infty\varphi_1(y)\,f_1(x+y)dy+\int_x^\infty\varphi_3(y)\,f_2(y-x)dy\,.$$

Подставим в него выражение, полученное для $\varphi_1(y)$.

$$\varphi_1(y)=\rho_0\int_0^\infty f_2(y+t)h_{f_1}(t)dt+\int_0^\infty\varphi_3(t)\,f_2(y+t)dt+\int_0^\infty\varphi_3(t)dt\int_y^\infty h_{f_1}(s-y)\,f_2(s+t)ds.$$

$$\varphi_2(x)=\rho_0\int_0^\infty f_1(x+t)\,f_2(t)dt+\rho_0\int_0^\infty f_1(x+y)dy\int_0^\infty f_2(y+t)h_{f_1}(t)dt+$$

$$+\int_0^\infty f_1(x+y)dy\int_0^\infty\varphi_3(t)\,f_2(y+t)dt+\int_0^\infty f_1(x+y)dy\int_0^\infty\varphi_3(t)dt\int_y^\infty h_{f_1}(s-y)\,f_2(s+t)ds+ \qquad (B.12)$$

$$+\int_x^\infty\varphi_3(y)\,f_2(y-x)dy.$$

Преобразуем слагаемые, входящие в выражение (B.12) для $\varphi_2(x)$.

Второе слагаемое примет вид:

$$\rho_0\int_0^\infty f_1(x+y)dy\int_0^\infty f_2(y+t)h_{f_1}(t)dt=\rho_0\int_0^\infty f_1(x+y)dy\int_y^\infty f_2(t)h_{f_1}(t-y)dt=$$

$$=\rho_0\int_0^\infty f_2(t)dt\int_0^t f_1(x+y)h_{f_1}(t-y)dy=\rho_0\int_0^\infty f_2(t)dt\int_0^t f_1(x+t-y)h_{f_1}(y)dy. \qquad (B.13)$$

Сложим первое слагаемое (B.12) и (B.13):

$$\rho_0\int_0^\infty f_1(x+t)\,f_2(t)dt+\rho_0\int_0^\infty f_2(t)dt\int_0^t f_1(t+x-y)h_{f_1}(y)dy=\rho_0\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,x)dt, \quad (B.14)$$

где $v_{f_1}(t,x)=f_1(t+x)+\int_0^t f_1(t+x-y)h_{f_1}(y)dy$ – плотность прямого остаточного времени.

Перепишем третье слагаемое (B.12) в виде:

$$\int_0^\infty f_1(x+y)dy\int_0^\infty \varphi_3(t)\,f_2(y+t)dt=\int_0^\infty \varphi_3(t)dt\int_0^\infty f_2(y+t)\,f_1(x+y)dy.$$

Преобразуем четвертое слагаемое (B.12):

$$\int_0^\infty f_1(x+y)dy\int_0^\infty \varphi_3(t)dt\int_y^\infty h_{f_1}(s-y)\,f_2(s+t)ds=\int_0^\infty \varphi_3(t)dt\int_0^\infty f_1(x+y)dy\int_y^\infty h_{f_1}(s-y)\,f_2(s+t)ds=$$

$$=\int_0^\infty \varphi_3(t)dt\int_0^\infty f_2(s+t)ds\int_0^s f_1(x+y)h_{f_1}(s-y)dy=\int_0^\infty \varphi_3(t)dt\int_0^\infty f_2(y+t)dy\int_0^y f_1(x+y-u)h_{f_1}(u)du.$$

Сложим третье и четвертое слагаемые (B.12):

$$\int_0^\infty \varphi_3(t)dt\int_0^\infty f_2(y+t)\,f_1(x+y)dy+\int_0^\infty \varphi_3(t)dt\int_0^\infty f_2(y+t)dy\int_0^y f_1(x+y-u)h_{f_1}(u)du=$$

$$=\int_0^\infty \varphi_3(t)dt\int_0^\infty f_2(t+y)v_{f_1}(y,x)dy.$$

Следовательно,

$$\varphi_2(x)=\rho_0\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,x)dt+\int_0^\infty \varphi_3(t)dt\int_0^\infty f_2(t+y)v_{f_1}(y,x)dy+\int_x^\infty \varphi_3(y)\,f_2(y-x)dy. \quad (B.15)$$

Рассмотрим совместно (B.6) и (B.15):

$$\begin{cases}\varphi_3(x)=\int_x^\infty \bar{R}(y-x)g(y-x)\varphi_2(y)dy+\int_0^\infty \varphi_2(y)dy\int_0^\infty \bar{R}(y+t)g(y+t)v_{f_1}(t,x)dt,\\ \varphi_2(x)=\rho_0\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,x)dt+\int_0^\infty \varphi_3(t)dt\int_0^\infty f_2(t+y)v_{f_1}(y,x)dy+\int_x^\infty \varphi_3(y)\,f_2(y-x)dy.\end{cases} \quad (B.16)$$

Введем функцию

$$\pi(x,y)=\int_0^\infty \bar{R}(y+t)g(y+t)v_{f_1}(t,x)dt.$$

Тогда (В.16) примет вид:

$$\begin{cases} \varphi_3(x) = \int\limits_x^\infty \bar{R}(y-x)g(y-x)\varphi_2(y)dy + \int\limits_0^\infty \varphi_2(y)\pi(x,y)dy, \\ \varphi_2(x) = \rho_0 \int\limits_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,x)dt + \int\limits_0^\infty \varphi_3(t)dt \int\limits_0^\infty f_2(t+y)v_{f_1}(y,x)dy + \int\limits_x^\infty \varphi_3(y)\, f_2(y-x)dy. \end{cases} \quad (В.17)$$

Подставим первое уравнение системы (В.17) во второе. Для этого сперва преобразуем первое уравнение.

$$\varphi_3(x) = \int\limits_0^\infty \bar{R}(y)g(y)\varphi_2(y+x)dy + \int\limits_0^\infty \varphi_2(y)\pi(x,y)dy\,,$$

$$\varphi_3(t) = \int\limits_0^\infty \bar{R}(s)g(s)\varphi_2(s+t)ds + \int\limits_0^\infty \varphi_2(s)\pi(t,s)ds\,.$$

Подставим $\varphi_3(t)$ во второе уравнение системы (В.17) и получим:

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) = {} & \rho_0 \int\limits_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,x)dt + \int\limits_0^\infty v_{f_1}(y,x)dy \int\limits_0^\infty f_2(y+t)dt \int\limits_0^\infty \bar{R}(s)g(s)\varphi_2(s+t)ds + \\ & + \int\limits_0^\infty v_{f_1}(y,x)dy \int\limits_0^\infty f_2(y+t)dt \int\limits_0^\infty \varphi_2(s)\pi(t,s)ds + \int\limits_x^\infty f_2(t-x)dt \int\limits_0^\infty \bar{R}(s)g(s)\varphi_2(s+t)ds + \\ & + \int\limits_x^\infty f_2(t-x)dt \int\limits_0^\infty \varphi_2(s)\pi(t,s)ds. \end{aligned} \quad (В.18)$$

Преобразуем слагаемые уравнения (В.18).

Второе слагаемое:

$$\begin{aligned} & \int\limits_0^\infty v_{f_1}(y,x)dy \int\limits_0^\infty f_2(y+t)dt \int\limits_0^\infty \bar{R}(s)g(s)\varphi_2(s+t)ds = \\ & = \int\limits_0^\infty v_{f_1}(y,x)dy \int\limits_0^\infty f_2(y+t)dt \int\limits_t^\infty \bar{R}(s-t)g(s-t)\varphi_2(s)ds = \\ & = \int\limits_0^\infty v_{f_1}(y,x)dy \int\limits_0^\infty \varphi_2(s)ds \int\limits_0^s f_2(y+t)\bar{R}(s-t)g(s-t)dt = \\ & = \int\limits_0^\infty \varphi_2(s)ds \int\limits_0^\infty v_{f_1}(y,x)dy \int\limits_0^s f_2(y+t)\bar{R}(s-t)g(s-t)dt. \end{aligned} \quad (В.19)$$

Третье слагаемое:

$$\int_0^\infty v_{f_1}(y,x)dy\int_0^\infty f_2(y+t)dt\int_0^\infty \varphi_2(s)\pi(t,s)ds=\int_0^\infty \varphi_2(s)ds\int_0^\infty v_{f_1}(y,x)dy\int_0^\infty f_2(y+t)\pi(t,s)dt. \quad (B.20)$$

Пятое слагаемое:

$$\int_x^\infty f_2(t-x)dt\int_0^\infty \varphi_2(s)\pi(t,s)ds=\int_0^\infty \varphi_2(s)ds\int_x^\infty f_2(t-x)\pi(t,s)dt\,. \quad (B.21)$$

Четвертое слагаемое:

$$\int_x^\infty f_2(t-x)dt\int_0^\infty \bar{R}(s)g(s)\varphi_2(s+t)ds=\int_x^\infty f_2(t-x)dt\int_t^\infty \bar{R}(s-t)g(s-t)\varphi_2(s)ds=$$

$$=\int_x^\infty \varphi_2(s)ds\int_x^s \bar{R}(s-t)g(s-t)\,f_2(t-x)dt=\int_x^\infty \varphi_2(s)ds\int_0^{s-x} \bar{R}(s-t-x)g(s-t-x)\,f_2(t)dt= \quad (B.22)$$

$$=\int_x^\infty \varphi_2(s)ds\left[\left(\bar{R}\cdot g\right)*f_2\right](s-x)=\int_x^\infty\left[\left(\bar{R}\cdot g\right)*f_2\right](s-x)\varphi_2(s)ds.$$

Введем функции

$$\tilde{\gamma}(x,s)=\int_0^\infty v_{f_1}(y,x)dy\int_0^s f_2(y+t)\bar{R}(s-t)g(s-t)dt+$$

$$+\int_0^\infty v_{f_1}(y,x)dy\int_0^\infty f_2(y+t)\pi(t,s)dt+\int_x^\infty f_2(t-x)\pi(t,s)dt,$$

$T(x)=\left[\left(\bar{R}\cdot g\right)*f_2\right](x)$, и оператор $\left(\Gamma_T\varphi\right)(x)=\int_x^\infty T(s-x)\varphi(s)ds.$

Тогда уравнение (B.18), используя (B.19) – (B.22), запишется в виде:

$$\varphi_2(x)=\rho_0\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,x)dt+\Gamma_T\varphi_2+\int_0^\infty \tilde{\gamma}(x,t)\varphi_2(t)dt.$$

Решим его методом последовательных приближений.

$$\left(I-\Gamma_T\right)\varphi_2=\rho_0\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,x)dt+\int_0^\infty \tilde{\gamma}(x,t)\varphi_2(t)dt,$$

$$\varphi_2=\left(I-\Gamma_T\right)^{-1}\left[\rho_0\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,x)dt+\int_0^\infty \tilde{\gamma}(x,t)\varphi_2(t)dt\right],$$

$$\left(I-\Gamma_T\right)^{-1}=I+\sum_{n=1}^\infty \Gamma_T^n,\ \ \left(\sum_{n=1}^\infty \Gamma_T^n\right)\varphi=\int_x^\infty h_T(y-x)\varphi(y)dy,\ \ h_T(x)=\sum_{n=1}^\infty T^{*(n)}(x),$$

и, следовательно, получим:

$$\varphi_2(x)=\rho_0\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,x)dt+\int_0^\infty\tilde\gamma(x,t)\varphi_2(t)dt+\rho_0\int_x^\infty h_T(y-x)dy\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,y)dt+$$
$$+\int_x^\infty h_T(y-x)dy\int_0^\infty\tilde\gamma(y,t)\varphi_2(t)dt. \qquad (B.23)$$

Преобразуем четвертое слагаемое выражения (B.23):

$$\int_x^\infty h_T(y-x)dy\int_0^\infty\tilde\gamma(y,t)\varphi_2(t)dt=\int_0^\infty\varphi_2(t)dt\int_x^\infty h_T(y-x)\tilde\gamma(y,t)dy.$$

Введем функцию

$$\tilde{\tilde\gamma}(x,t)=\tilde\gamma(x,t)+\int_x^\infty h_T(y-x)\tilde\gamma(y,t)dy=\tilde\gamma(x,t)+\int_x^\infty h_T(y)\tilde\gamma(y+x,t)dy$$

и оператор $\left(\Gamma_{\tilde{\tilde\gamma}}\varphi\right)(x)=\int_0^\infty\tilde{\tilde\gamma}(x,t)\varphi(t)dt.$

Тогда уравнение (B.23) запишется в виде:

$$\varphi_2(x)=\rho_0\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,x)dt+\rho_0\int_x^\infty h_T(y-x)dy\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,y)dt+\Gamma_{\tilde{\tilde\gamma}}\varphi_2. \qquad (B.24)$$

Найдем его решение:

$$\varphi_2(x)=\rho_0\left(\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,x)dt+\int_x^\infty h_T(y-x)dy\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,y)dt\right)+\Gamma_{\tilde{\tilde\gamma}}\varphi_2,$$

$$\varphi_2(x)=\rho_0\left(I+\sum_{n=1}^\infty\Gamma_{\tilde{\tilde\gamma}}^n\right)\left[\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,x)dt+\int_x^\infty h_T(y-x)dy\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,y)dt\right],$$

$$\left(I+\sum_{n=1}^\infty\Gamma_{\tilde{\tilde\gamma}}^n\varphi\right)(x)=\int_0^\infty\tilde{\tilde\pi}(x,y)\varphi(y)dy,\qquad \tilde{\tilde\pi}(x,y)=\sum_{n=1}^\infty\tilde{\tilde\gamma}^{(n)}(x,y),$$

$$\tilde{\tilde\gamma}^{(n)}(x,y)=\int_0^\infty\tilde{\tilde\gamma}^{(n-1)}(x,t)\tilde{\tilde\gamma}(t,y)dt,\qquad \tilde{\tilde\gamma}^{(1)}(x,y)=\tilde{\tilde\gamma}(x,y).$$

Следовательно,

$$\varphi_2(x)=\rho_0\left[\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,x)dt+\int_x^\infty h_T(y-x)dy\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,y)dt+\right.$$
$$\left.+\int_0^\infty \tilde{\tilde{\pi}}(x,y)dy\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,y)dt+\int_0^\infty \tilde{\tilde{\pi}}(x,y)dy\int_y^\infty h_T(s-y)ds\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,s)dt\right], \quad (B.25)$$

Запишем $\varphi_2(x)=\rho_0\Psi(x)$, где функция $\Psi(x)$ имеет вид:

$$\Psi(x)=\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,x)dt+\int_x^\infty h_T(y-x)dy\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,y)dt+$$
$$+\int_0^\infty \tilde{\tilde{\pi}}(x,y)dy\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,y)dt+\int_0^\infty \tilde{\tilde{\pi}}(x,y)dy\int_y^\infty h_T(s-y)ds\int_0^\infty f_2(t)v_{f_1}(t,s)dt.$$

Зная $\varphi_2(x)$, можно найти решение системы уравнений (B.1), последовательной подстановкой.

Рассмотрим случай, когда время обработки ТЯ единицы продукции, время безотказной работы ТЯ, время восстановления ТЯ имеют экспоненциальное распределение с функциями распределения $F_1(t)=1-e^{-\lambda_1 t}$, $F_2(t)=1-e^{-\lambda_2 t}$, $G(t)=1-e^{-\mu t}$. Резерв времени является случайным и имеет экспоненциальное распределение с ФР $R(t)=1-e^{-ht}$.

Тогда решение системы (B.1) принимает вид:

$$\begin{cases}\rho(1)=\rho_0,\\ \rho(11x)=\rho(10x)=\varphi_1(x)=\rho_0\dfrac{\lambda_1(h+\mu)}{h}e^{-\lambda_2 x},\\ \rho(10x)=\varphi_2(x)=\rho_0\dfrac{\lambda_1(h+\mu)}{h}e^{-\lambda_1 x},\\ \rho(1\overline{1}xz)=\rho(1\overline{0}xz)=\varphi_4(x,z)=\rho_0\lambda_1\mu e^{-\mu x}e^{-hz},\\ \rho(21xz)=\rho_0\lambda_1\mu e^{-\lambda_1 x}e^{-hz},\\ \rho(21x)=\varphi_3(x)=\rho_0\dfrac{\lambda_1\mu}{h}e^{-\lambda_1 x},\\ \rho(\omega x)=\varphi_5(x)=\rho_0\mu e^{-\mu x},\end{cases}$$

Приложение Г

Расчет стационарных характеристик надежности системы (для таблицы 2.1) и стационарных характеристик надежности укрупненной системы (таблица 2.2) в MathCad.

$k := 5 \quad \lambda := 0.6 \quad \mu := 7 \quad \delta := 0.8 \quad \nu := 6$

$j := 0..7$

$h1_j := 0.1 \cdot j \qquad M\alpha_1 := \frac{k}{\lambda} \qquad M\alpha_2 := \frac{k}{\delta}$

$h2_j := 0.7 - 0.1 \cdot j$

$$F1(x) := \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda \cdot x)^i \cdot e^{-\lambda \cdot x}}{i!} \qquad F2(x) := \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\delta \cdot x)^i \cdot e^{-\delta \cdot x}}{i!}$$

$$G1(x) := \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu \cdot x)^i \cdot e^{-\mu \cdot x}}{i!} \qquad G2(x) := \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\nu \cdot x)^i \cdot e^{-\nu \cdot x}}{i!}$$

$$M1(h1) := \frac{\int_{h1}^{\infty} G1(t)\,dt}{G1(h1)} \qquad M2(h2) := \frac{\int_{h2}^{\infty} G2(t)\,dt}{G2(h2)}$$

$$M3(h2) := \int_{h2}^{\infty} G2(t)\,dt \qquad M4(h1) := \int_{h1}^{\infty} G1(t)\,dt$$

$$\rho 0(h1, h2) := G1(h1) \cdot G2(h2) \cdot (M1(h1) + M2(h2))$$

$$\rho 2(h1, h2) := 2 \cdot \left(M\alpha_2 + M3(h2)\right) \cdot \left(M\alpha_1 + M4(h1)\right)$$

$$\rho 1(h1, h2) := G2(h2)\left(M\alpha_1 + M4(h1)\right) + G1(h1)\left(M\alpha_2 + M3(h2)\right) + 2 \cdot (G1(h1) \cdot M1(h1) + G2(h2) \cdot M2(h2))$$

$$p21(h1, h2) := \frac{G1(h1)\left(M\alpha_2 + M3(h2)\right) + G2(h2)\left(M\alpha_1 + M4(h1)\right)}{\rho 2(h1, h2)}$$

$$p10(h1, h2) := \frac{[G1(h1) \cdot G2(h2) \cdot (M1(h1) + M2(h2))]}{\rho 1(h1, h2)}$$

$$p12(h1,h2) := \frac{\left[G1(h1)\left(M\alpha_2 + M3(h2)\right) + G2(h2)\left(M\alpha_1 + M4(h1)\right)\right]}{\rho 1(h1,h2)}$$

$$p22(h1,h2) := \frac{(2 - G1(h1))\cdot\left(M\alpha_2 + M3(h2)\right) + (2 - G2(h2))\cdot\left(M\alpha_1 + M4(h1)\right)}{\rho 2(h1,h2)}$$

$$p11(h1,h2) := \frac{(2 - G1(h1))\cdot G2(h2)\cdot M2(h2) + (2 - G2(h2))\cdot G1(h1)\cdot M1(h1)}{\rho 1(h1,h2)}$$

$$m0(h1,h2) := \frac{G1(h1)\cdot G2(h2)\cdot M1(h1)\cdot M2(h2)}{\rho 0(h1,h2)}$$

$$m1(h1,h2) := \frac{G1(h1)\cdot M1(h1)\left(M\alpha_2 + M3(h2)\right) + G2(h2)\cdot M2(h2)\left(M\alpha_1 + M4(h1)\right)}{\rho 1(h1,h2)}$$

$$m2(h1,h2) := \frac{\left(M\alpha_1 + M4(h1)\right)\cdot\left(M\alpha_2 + M3(h2)\right)}{\rho 2(h1,h2)}$$

$$p0(h1,h2) := \frac{p10(h1,h2)\cdot p21(h1,h2)}{p10(h1,h2)\cdot p21(h1,h2) + p21(h1,h2) + p12(h1,h2)}$$

$$p1(h1,h2) := \frac{p21(h1,h2)}{p10(h1,h2)\cdot p21(h1,h2) + p21(h1,h2) + p12(h1,h2)}$$

$$p2(h1,h2) := \frac{p12(h1,h2)}{p10(h1,h2)\cdot p21(h1,h2) + p21(h1,h2) + p12(h1,h2)}$$

Стационарные характеристики надежности укрупненной системы (формулы (2.26)):

$T1(h1,h2) := m0(h1,h2)$ среднее стационарное время восстановления

$N1(h1,h2) := \dfrac{m1(h1,h2)\cdot p1(h1,h2) + m2(h1,h2)\cdot p2(h1,h2)}{p0(h1,h2)}$ средняя стационарная наработка на отказ

$K1(h1,h2) := \dfrac{N1(h1,h2)}{T1(h1,h2) + N1(h1,h2)}$ стационарный коэффициент готовности

Стационарные характеристик надежности системы (формулы (2.22, 2.21, 2.20)):

$T(h1,h2) := \dfrac{M1(h1)\cdot M2(h2)}{M1(h1) + M2(h2)}$ среднее стационарное время восстановления

$$N(h1,h2) := \frac{G1(h1)\cdot M1(h1)\left(M\alpha_2 + M3(h2)\right) + G2(h2)\cdot M2(h2)\left(M\alpha_1 + M4(h1)\right) + \left(M\alpha_1 + M4(h1)\right)\cdot\left(M\alpha_2 + M3(h2)\right)}{(M1(h1) + M2(h2))\cdot G1(h1)\cdot G2(h2)}$$

средняя стационарная наработка на отказ

$$K(h1,h2) := \frac{N(h1,h2)}{T(h1,h2) + N(h1,h2)}$$ стационарный коэффициент готовности

Результаты расчетов:

$T\left(h1_j, h2_j\right) =$

0.24116
0.24076
0.23775
0.23322
0.22842
0.22374
0.21893
0.21377

$N\left(h1_j, h2_j\right) =$

102.27428
91.03527
84.36502
82.29086
85.17174
93.61663
108.69046
132.29954

$K\left(h1_j, h2_j\right) =$

0.99765
0.99736
0.99719
0.99717
0.99733
0.99762
0.99799
0.99839

$T1\left(h1_j, h2_j\right) =$

0.24116
0.24076
0.23775
0.23322
0.22842
0.22374
0.21893
0.21377

$N1\left(h1_j, h2_j\right) =$

102.27428
91.03527
84.36502
82.29086
85.17174
93.61663
108.69046
132.29954

$K1\left(h1_j, h2_j\right) =$

0.99765
0.99736
0.99719
0.99717
0.99733
0.99762
0.99799
0.99839

Приложение Д

Расчет приближенных стационарных характеристик надежности системы (для таблицы 2.3) в MathCad.

$k := 5 \quad \lambda := 0.6 \quad \mu := 7 \quad \delta := 0.8 \quad \nu := 6$

$j := 0..7$

$h_j := 0.1 \cdot j \qquad M\alpha_1 := \frac{k}{\lambda} \qquad M\alpha_2 := \frac{k}{\delta}$

$$F1(x) := \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda \cdot x)^i \cdot e^{-\lambda \cdot x}}{i!} \qquad F2(x) := \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\delta \cdot x)^i \cdot e^{-\delta \cdot x}}{i!}$$

$$G1(x) := \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu \cdot x)^i \cdot e^{-\mu \cdot x}}{i!} \qquad G2(x) := \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\nu \cdot x)^i \cdot e^{-\nu \cdot x}}{i!}$$

$$T(h) := \frac{M\alpha_1 \cdot M\alpha_2 + \int_0^h \int_0^x F2(x) \cdot G1(t)\, dt\, dx + \int_0^h G1(t)\, dt \cdot \int_h^\infty F2(x)\, dx + \int_0^\infty \int_0^x F1(x) \cdot G2(t)\, dt\, dx}{G1(h) \cdot \left(\int_0^h F2(x) \cdot G2(h - x)\, dx + \int_0^\infty F1(x) \cdot G2(h + x)\, dx \right)}$$

$$N(h) := \frac{\int_h^\infty \int_0^h G1(y) \cdot F2(x)\, G2(y - x)\, dx dy + \int_h^\infty \int_0^\infty G1(y) \cdot F1(x)\, G2(x + y)\, dx dy}{G1(h) \cdot \left(\int_0^h F2(x) \cdot G2(h - x)\, dx + \int_0^\infty F1(x) \cdot G2(h + x)\, dx \right)}$$

$$K(h) := \frac{T(h)}{T(h) + N(h)}$$

$T(h_j) =$

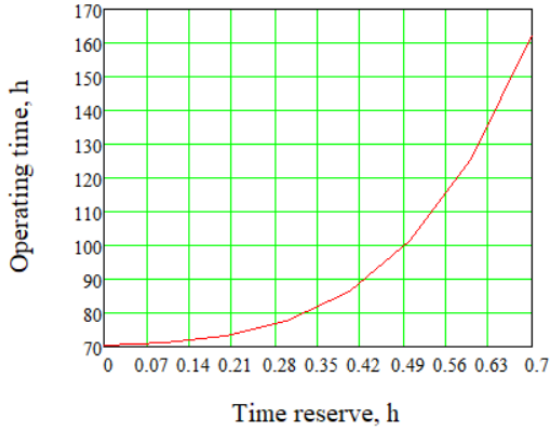
70.347
71.143
72.851
77.308
86.281
101.574
125.693
162.566

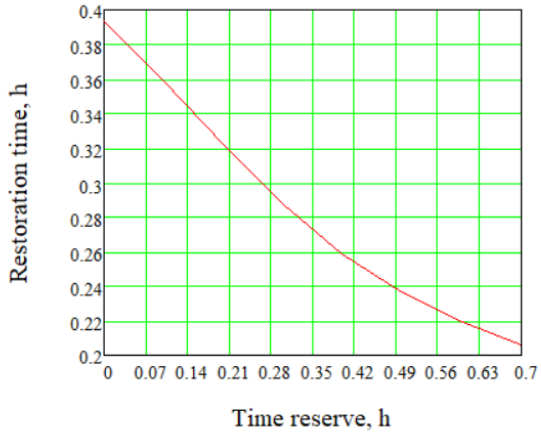
$N(h_j) =$

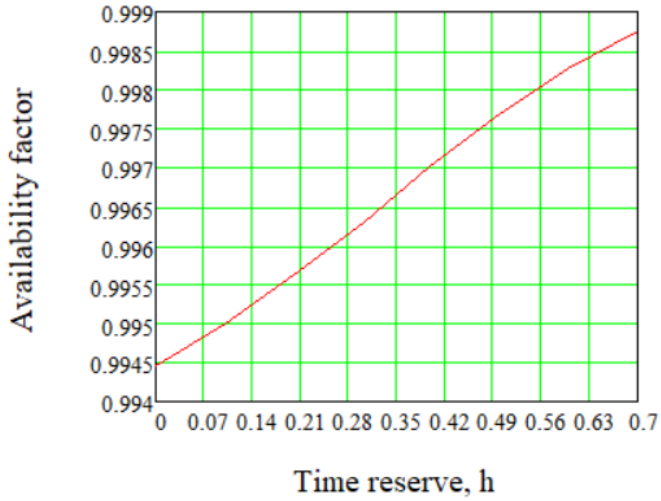
0.393
0.359
0.322
0.287
0.259
0.236
0.219
0.206

$K(h_j) =$

0.99444
0.99498
0.99561
0.9963
0.99701
0.99768
0.99826
0.99873


Operating time, h
170
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
0 0.07 0.14 0.21 0.28 0.35 0.42 0.49 0.56 0.63 0.7
Time reserve, h


Restoration time, h
0.4
0.38
0.36
0.34
0.32
0.3
0.28
0.26
0.24
0.22
0.2
0 0.07 0.14 0.21 0.28 0.35 0.42 0.49 0.56 0.63 0.7
Time reserve, h


Availability factor
0.999
0.9985
0.998
0.9975
0.997
0.9965
0.996
0.9955
0.995
0.9945
0.994
0 0.07 0.14 0.21 0.28 0.35 0.42 0.49 0.56 0.63 0.7
Time reserve, h

Приложение Е

Краткие сведения из теории скрытых марковских моделей

Следуя [93], опишем краткие сведения из теории скрытых марковских моделей.

Цепь Маркова полезна, когда нам нужно вычислить вероятность для последовательности наблюдаемых событий. Однако во многих случаях интересующие нас события скрыты: мы не наблюдаем их непосредственно.

Скрытая марковская модель (СММ) позволяет нам говорить как о наблюдаемых событиях, так и о скрытых событиях, которые мы считаем причинными факторами в нашей вероятностной модели. СММ определяется следующими компонентами [127, 97, 93]:

1. $Q = \{q_1, q_2, ..., q_N\}$ – множество из N состояний модели.

2. $A = \{a_{11}, ..., a_{ij}, ..., a_{NN}\}$ – матрица переходных вероятностей, где a_{ij} представляют собой вероятности перехода из состояния i в состояние j. $\sum_{j=1}^{N} a_{ij} = 1, \ \forall i$.

3. $O = \{o_1, o_2, ..., o_T\}$ – последовательность из T наблюдений (наблюдаемая последовательность, вектор сигналов), каждое из которых берется из алфавита наблюдаемой последовательности $V = \{v_1, v_2, ..., v_V\}$ (множество сигналов).

4. $B = b_i(o_t)$ – последовательность вероятностей наблюдения, также называемая вероятностями излучения, каждая из которых выражает вероятность того, что наблюдение o_t будет генерироваться из состояния i.

5. $\pi = \{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_N\}$ – начальное распределение вероятностей по состояниям. π_i – вероятность того, что цепь Маркова начнется в состоянии i. Некоторые состояния j могут иметь $\pi_j = 0$ (это значит, что они не могут быть начальными). $\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$.

Полное описание СММ состоит из определения множества состояний модели, наблюдаемой последовательности и $\lambda = (A, B, \pi)$.

Скрытая марковская модель первого порядка создает два упрощающих предположения. Во-первых, как и в цепи Маркова первого порядка, вероятность конкретного состояния зависит только от предыдущего состояния:

$$P(q_i \mid q_1,...,q_{i-1}) = P(q_i \mid q_{i-1}).\ \text{(допущение Маркова).} \qquad (E.1)$$

Во-вторых, вероятность выходного наблюдения o_i зависит только от состояния, которое произвело наблюдение q_i, а не от каких-либо других состояний или любых других наблюдений:

$$P(o_i \mid q_1,...,q_i,...,q_T, o_1,...,o_i,...,o_T) = P(o_i \mid q_i).\ \text{(Независимость выхода)} \qquad (E.2)$$

Во влиятельном руководстве Л. Рабинера [127], основанном на уроках Джека Фергюсона в 1960-х годах, появилась идея, что скрытые марковские модели должны характеризоваться тремя фундаментальными задачами, которые должны быть решены для того, чтобы модель могла успешно решать поставленные перед ней задачи:

1. **Problem 1 (Likelihood):** задана наблюдаемая последовательность $O = \{o_1, o_2, ..., o_T\}$ и модель $\lambda = (A, B, \pi)$. Необходимо вычислить вероятность $P(O \mid \lambda)$ – вероятность того, насколько хорошо данная наблюдаемая последовательность согласуется с моделью.

Напомним, что для скрытых марковских моделей каждое скрытое состояние производит только одно наблюдение. Таким образом, последовательность скрытых состояний и последовательность наблюдений имеют одинаковую длину.

Учитывая это однозначное отображение и марковские предположения, выраженные в формуле (E.1), для конкретной последовательности скрытого состояния $Q = q_0, q_1, q_2, ..., q_T$ и последовательности наблюдений $O = o_1, o_2, ..., o_T$, вероятность последовательности наблюдений равна

$$P(O \mid Q) = \prod_{i=1}^{T} P(o_i \mid q_i).$$

Но, конечно, мы на самом деле не знаем, какова была скрытая последовательность состояний. Нам нужно вместо этого вычислить вероятность событий путем суммирования всех возможных последовательностей, взвешенных по их вероятности. Во-первых, давайте вычислим общую вероятность нахождения в определенной последовательности Q и генерации определенной последовательности событий. В общем, это

$$P(O,Q) = P(O \mid Q) \times P(Q) = \prod_{i=1}^{T} P(o_i \mid q_i) \times \prod_{i=1}^{T} P(q_i \mid q_{i-1})$$

Теперь, когда мы знаем, как рассчитать общую вероятность наблюдений с определенной последовательностью скрытых состояний, мы можем вычислить общую вероятность наблюдений, просто суммируя все возможные последовательности скрытых состояний:

$$P(O) = \sum_{Q} P(O,Q) = \sum_{Q} P(O \mid Q) P(Q).$$

Для СММ с N скрытыми состояниями и последовательностью наблюдений T наблюдений существуют N^T возможных скрытых последовательностей. Для реальных задач, где N и T оба большие, N^T – очень большое число, поэтому мы не можем вычислить общую вероятность наблюдения, вычисляя отдельную вероятность наблюдения для каждой последовательности скрытых состояний, а затем суммируя их.

Вместо использования такого чрезвычайно экспоненциального алгоритма, мы используем эффективный алгоритм $O(N^2T)$, называемый прямым алгоритмом (**forward algorithm**). Прямой алгоритм представляет собой разновидность алгоритма динамического программирования, то есть алгоритма, который использует таблицу для хранения промежуточных значений при построении вероятности последовательности наблюдения. Прямой алгоритм вычисляет вероятность наблюдения, суммируя вероятности всех возможных путей скрытого состояния, которые могут генерировать последовательность наблюдения, но он

делает это эффективно, неявно складывая каждый из этих путей в одну прямую решетку.

Каждая ячейка решетки алгоритма прямого хода $\alpha_t(j)$ представляет вероятность нахождения в состоянии *j* после наблюдения первых *t* наблюдений с учетом модели λ. Значение каждой ячейки $\alpha_t(j)$ вычисляется путем суммирования вероятностей каждого пути, который может привести нас к этой ячейке. Формально каждая ячейка выражает следующую вероятность:

$$\alpha_t(j) = P\left(o_1, o_2 ... o_t, q_t = j \mid \lambda\right).$$

Здесь $q_t = j$ означает, что «*t*-ое состояние в последовательности состояний является состоянием *j*». Мы вычисляем эту вероятность $\alpha_t(j)$, суммируя по расширениям всех путей, ведущих к текущей ячейке. Для данного состояния q_j в момент времени *t* значение $\alpha_t(j)$ вычисляется как:

$$\alpha_t(j) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{t-1}(i) a_{ij} b_j(o_t).$$

Три фактора в расширении предыдущих путей для вычисления прямой переменной в момент времени *t* это:

- $\alpha_{t-1}(i)$ предыдущая вероятность прямого пути из предыдущего временного шага;
- a_{ij} вероятность перехода из предыдущего состояния q_i в текущее q_j;
- $b_j(o_t)$ вероятность наблюдения состояния символа o_t при текущем состоянии *j*.

Формальное описание алгоритма прямого хода (**the forward algorithm**):

1. Инициализация:

$$\alpha_1(j) = \pi_j b_j(o_1), \;\; 1 \le j \le N.$$

2. Рекурсия:

$$\alpha_t(j) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{t-1}(i) a_{ij} b_j(o_t), \;\; 1 \le j \le N, 1 < t \le T.$$

3. Завершение:

$$P(O|\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_T(i).$$

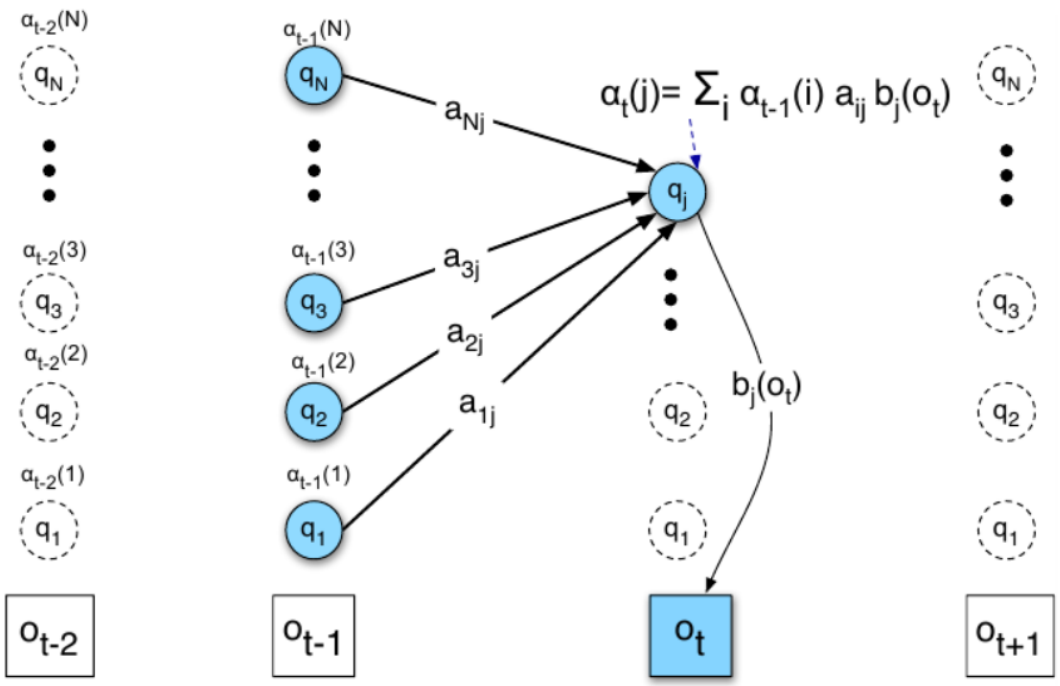


Рисунок Е.1 – Визуализация вычисления отдельного элемента $\alpha_t(i)$ в решетке путем суммирования всех предыдущих значений α_{t-1}, взвешенных по вероятностям их перехода a, и умножения на вероятность наблюдения $b_j(o_t)$. Для многих применений СММ многие из вероятностей перехода равны 0, поэтому не все предыдущие состояния будут вносить вклад в прямую переменную текущего состояния. Скрытые состояния в кругах, наблюдения в квадратах. Затененные узлы включаются в вычисление вероятности для $\alpha_t(i)$. [127, 93]

2. Problem 2 (Decoding): задана наблюдаемая последовательность $O=\{o_1,o_2,...,o_T\}$ и модель $\lambda=(A,B,\pi)$. Необходимо подобрать последовательность состояний системы таким образом, чтобы она лучше всего описывала наблюдаемую последовательность.

Это задача, в которой мы пытаемся понять, что же происходит в скрытой части модели, то есть найти «правильную» последовательность, которую

проходит модель. Совершенно ясно, что абсолютно точно нельзя определить эту последовательность. Для приближенного решения этой проблемы обычно пользуются некоторыми оптимальными показателями, критериями. К сожалению, не существует единого критерия оценки для определения последовательности состояний. При решении второй задачи необходимо каждый раз принимать решение о том, какие показатели использовать. Данные, полученные при решении этой задачи, используются для изучения поведения построенной модели, нахождения оптимальной последовательности её состояний, для статистики и т.п.

Для любой модели, такой как СММ, которая содержит скрытые переменные, задача определения, какая последовательность переменных является основным источником некоторой последовательности наблюдений, называется задачей декодирования.

Найти лучшую последовательность можно следующим образом: для каждой возможной последовательности скрытых состояний, мы могли бы запустить прямой алгоритм и вычислить вероятность последовательности наблюдения с учетом этой скрытой последовательности состояний. Тогда мы могли бы выбрать скрытую последовательность состояний с максимальной вероятностью наблюдения. Из предыдущего раздела должно быть ясно, что мы не можем сделать это, потому что существует экспоненциально большое количество последовательностей состояний.

Вместо этого наиболее распространенными алгоритмами декодирования для СММ является алгоритм Витерби (the **Viterbi algorithm**) [137, 127, 97, 93]. Как и алгоритм прямого хода, алгоритм Витерби – это разновидность динамического программирования, использующего решетку динамического программирования.

Идея состоит в том, чтобы обрабатывать последовательность наблюдений слева направо, заполняя решетку. Каждая ячейка решетки, $v_t(j)$, представляет вероятность того, что СММ находится в состоянии j после наблюдения первых t наблюдений и прохождения через наиболее вероятную последовательность состояний $q_1,...,q_{t-1}$, учитывая модель λ. Значение каждой ячейки $v_t(j)$

вычисляется путем рекурсивного выбора наиболее вероятного пути, который мог бы привести нас к этой ячейке. Формально каждая ячейка выражает вероятность:

$$v_t(j) = \max_{q_1,\ldots,q_{t-1}} P\left(q_1,\ldots,q_{t-1},o_1,o_2\ldots o_t,q_t = j \mid \lambda\right).$$

Заметим, что мы представляем наиболее вероятный путь, беря максимум для всех возможных предыдущих последовательностей состояний. Как и другие алгоритмы динамического программирования, Витерби рекурсивно заполняет каждую ячейку. Учитывая, что мы уже вычислили вероятность нахождения в каждом состоянии в момент времени (*t-1*), мы вычисляем вероятность Витерби, выбирая наиболее вероятное из расширений путей, ведущих к текущей ячейке. Для данного состояния q_j в момент времени *t* значение $v_t(j)$ вычисляется как

$$v_t(j) = \max_{i=1}^{N} v_{t-1}(i) a_{ij} b_j(o_t).$$

Три фактора, которые умножаются для расширения предыдущих путей для вычисления вероятности Витерби в момент времени *t* это:

- $v_{t-1}(i)$ вероятность предыдущего пути Витерби с предыдущего временного шага;
- a_{ij} вероятность перехода из предыдущего состояния q_i в текущее q_j;
- $b_j(o_t)$ вероятность наблюдения состояния символа o_t при текущем состоянии *j*.

Обратим внимание, что алгоритм Витерби идентичен прямому алгоритму, за исключением того, что он берет максимум по вероятностям предыдущего пути, тогда как прямой алгоритм принимает сумму. Также отметим, что алгоритм Витерби имеет один компонент, которого у прямого алгоритма нет: обратные указатели. Причина в том, что хотя прямой алгоритм должен обеспечивать вероятность наблюдения, алгоритм Витерби должен давать вероятность, а также наиболее вероятную последовательность состояний. Мы вычисляем эту наилучшую последовательность состояний, отслеживая путь скрытых состояний, которые вели к каждому состоянию, а затем в конце возвращаемся к лучшему пути к началу (обратный ход Витерби).

Наконец, мы можем дать формальное определение рекурсии Витерби (the **Viterbi algorithm**) следующим образом:

1. Инициализация:

$$v_1(j) = \pi_j b_j(o_1), \;\; 1 \le j \le N,$$

$$bt_1(j) = 0, \;\; 1 \le j \le N.$$

2. Рекурсия:

$$v_t(j) = \max_{i=1}^{N} v_{t-1}(i) a_{ij} b_j(o_t), \;\; 1 \le j \le N, 1 < t \le T,$$

$$bt_t(j) = \arg\max_{i=1}^{N} v_{t-1}(i) a_{ij} b_j(o_t), \;\; 1 \le j \le N, 1 < t \le T.$$

3. Завершение:

$$P^*(O \mid \lambda) = \max_{i=1}^{N} v_T(i),$$

$$q_t^* = \arg\max_{i=1}^{N} v_T(i).$$

3. **Problem 3 (Learning):** Подобрать параметры $\lambda = (A, B, \pi)$ модели таким образом, чтобы максимизировать значение вероятности $P(O \mid \lambda)$.

Решение задачи 3 состоит в оптимизации модели таким образом, чтобы она как можно лучше описывала реальную наблюдаемую последовательность. Наблюдаемая последовательность, по которой оптимизируется СММ, принято называть обучающей последовательностью, поскольку с помощью нее мы «обучаем» модель. Задача обучения СММ — это важнейшая задача для большинства проектируемых СММ, поскольку она заключается в оптимизации параметров СММ на основе обучающей наблюдаемой последовательности, то есть создается модель, наилучшим образом описывающая реальные процессы.

Решение задачи 3 позволяет найти алгоритм прямого-обратного хода (**Forward-Backward algorithm**).

Вход в такой алгоритм обучения будет представлять собой немаркированную последовательность наблюдений *O* и словарь потенциальных скрытых состояний *Q*.

Стандартным алгоритмом обучения СММ является алгоритм «прямого-обратного хода», или алгоритм Баума-Велша [68], особый случай алгоритма «максимального правдоподобия» (the **Expectation-Maximization**) или EM [80]. Алгоритм позволит нам обучать как вероятности перехода *A*, так и вероятности испускания сигналов *B* СММ. EM алгоритм является итеративным алгоритмом, который вычисляет начальную оценку вероятностей, затем использует эти оценки для вычисления лучшей оценки и так далее, итеративно улучшая изучаемые вероятности.

Для реальной СММ мы не можем вычислить эти значения непосредственно из последовательности наблюдений, так как мы не знаем, какой путь состояний был пройден через машину для данного входа.

Алгоритм Баума-Велша решает эту проблему путем итеративной оценки количества. Мы начнем с оценки вероятностей перехода и наблюдения, а затем используем эти оценочные вероятности для получения все более и более вероятных вероятностей. И мы собираемся сделать это путем вычисления прямой переменной для наблюдения и последующего деления этой вероятностной массы между всеми различными путями, которые способствовали этой прямой переменной.

Чтобы понять алгоритм, нам нужно определить обратную переменную. Обратная переменная β – это вероятность увидеть наблюдения от времени *(t+1)* до конца, учитывая, что мы находимся в состоянии *i* в момент времени *t* (и учитывая модель λ):

$$\beta_t(i) = P\left(o_{t+1}, o_{t+2}, ..., o_T \mid q_t = i, \lambda\right).$$

Они вычисляются индуктивно аналогично алгоритму прямого хода.

1. Инициализация:

$$\beta_T(i) = 1, \;\; 1 \le i \le N.$$

2. Рекурсия:

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j), \;\; 1 \le j \le N, 1 \le t < T.$$

3. Завершение:

$$P(O \mid \lambda) = \sum_{j=1}^{N} \pi_j b_j(o_1) \beta_1(j).$$

Рисунок Е.2 иллюстрирует шаг обратной индукции.

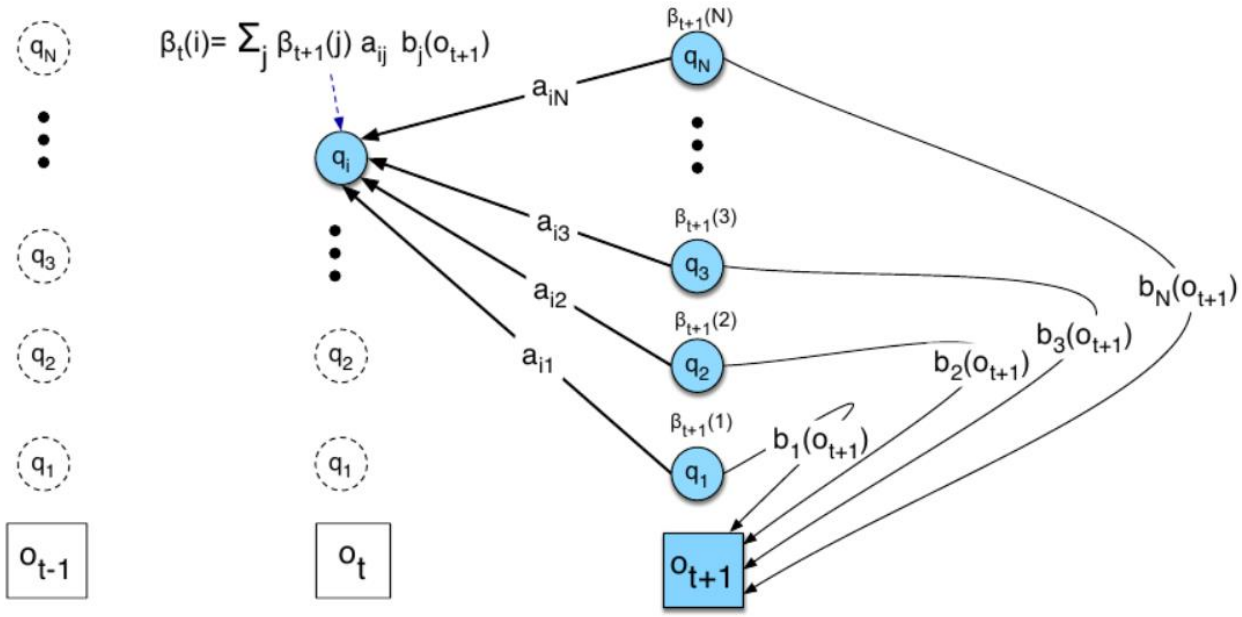


Рисунок Е.2 – Вычисление $\beta_t(i)$ путем суммирования всех последовательных значений $\beta_{t+1}(j)$, взвешенных по вероятностям их перехода a_{ij} и вероятностям их наблюдения $b_j(o_{t+1})$. Начальное и конечное состояния не показаны. [127, 93].

Теперь видно, как прямая и обратная переменные могут помочь вычислить вероятность перехода a_{ij} и вероятность наблюдения $b_i(o_t)$ из последовательности наблюдений, даже если фактический путь, пройденный через модель, скрыт.

Давайте начнем с того, что посмотрим, как оценить $\hat{a}_{ij}$ с помощью варианта простой оценки максимального правдоподобия:

$$\hat{a}_{ij} = \frac{\text{ожидаемое число переходов из состояния } i \text{ в } j}{\text{ожидаемое число переходов из } i}. \qquad \text{(E.3)}$$

Чтобы вычислить числитель (Е.3), предположим, что у нас была некоторая оценка вероятности того, что данный переход $i \to j$ был сделан в определенный

момент времени t в последовательности наблюдений. Если бы мы знали эту вероятность для каждого конкретного времени t, мы могли бы суммировать за все время t, чтобы оценить общее количество для перехода $i \to j$.

Более формально, давайте определим вероятность ξ_t как вероятность оказаться в состоянии i в момент времени t и состоянии j в момент времени (t+1), учитывая последовательность наблюдений и, конечно, модель:

$$\xi_t(i,j) = P\left(q_t = i, q_{t+1} = j \mid O, \lambda\right). \tag{E.4}$$

Чтобы вычислить ξ_t, мы сначала вычисляем вероятность, которая похожа на ξ_t, но отличается тем, что включает в себя вероятность наблюдения; обратите внимание на различные условия O из уравнения (E.4):

$$\text{почти } \xi_t(i,j) = P\left(q_t = i, q_{t+1} = j, O \mid \lambda\right). \tag{E.5}$$

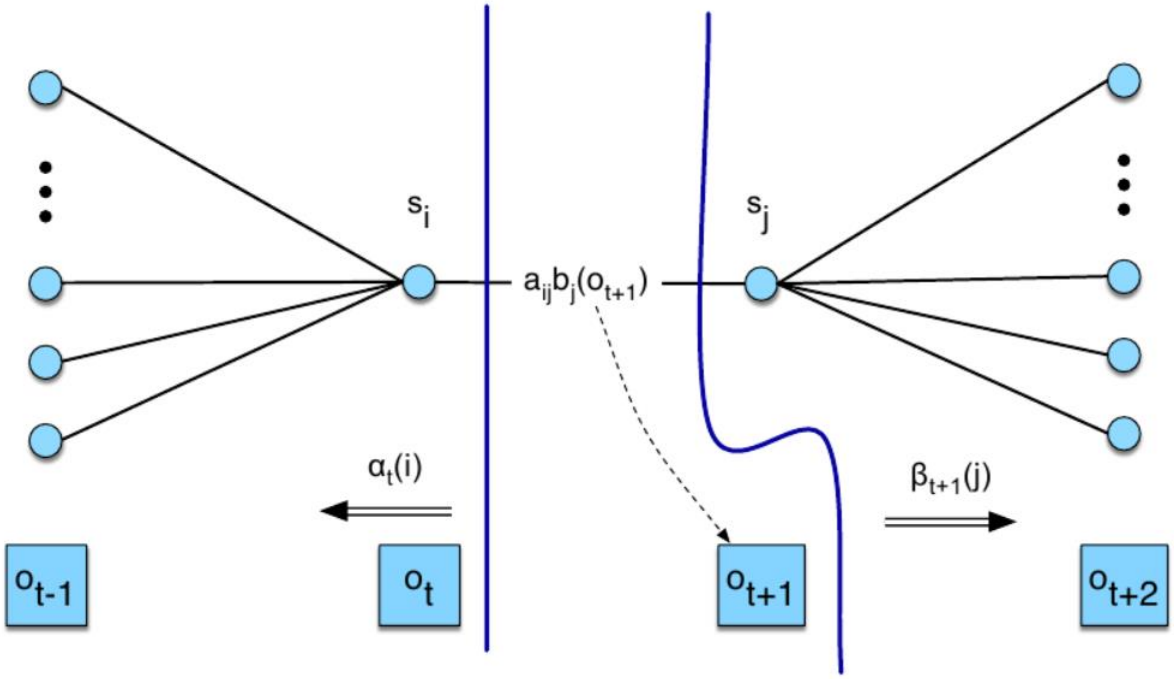


Рисунок E.3 – Расчет совместной вероятности нахождения в состоянии i в момент времени t и в состоянии j в момент времени (t+1). На рисунке показаны различные вероятности, которые необходимо объединить для получения $P\left(q_t = i, q_{t+1} = j, O \mid \lambda\right)$: вероятности α и β, вероятность перехода a_{ij} и вероятность наблюдения $b_j(o_{t+1})$. [127, 93].

На Рисунке Е.3 показаны различные вероятности, которые входят в вычисление почти $\xi_t(i,j)$: вероятность перехода для рассматриваемой дуги, вероятность α до дуги, вероятность β после дуги и вероятность наблюдения для символа сразу после дуги. Эти четыре умножаются вместе для получения почти $\xi_t(i,j)$ следующим образом:

$$\text{почти } \xi_t(i,j) = \alpha_t(i) a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j). \tag{E.6}$$

Чтобы вычислить ξ_t из почти ξ_t, мы следуем законам вероятности и делим на $P(O|\lambda)$, так как

$$P(X|Y,Z) = \frac{P(X,Y|Z)}{P(Y|Z)}.$$

Вероятность наблюдения данной модели:

$$P(O|\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_t(j)\beta_t(j).$$

Итак, окончательное уравнение для ξ_t имеет вид:

$$\xi_t(i,j) = \frac{\alpha_t(i) a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)}{\sum_{j=1}^{N} \alpha_t(j)\beta_t(j)}$$

Ожидаемое число переходов из состояния i в состояние j является суммой по всем t из ξ. Для нашей оценки a_{ij} в формуле (Е.3), нам просто нужна еще одна вещь: общее ожидаемое количество переходов из состояния i. Мы можем получить это, суммируя все переходы из состояния i. Вот окончательная формула для $\hat{a}_{ij}$:

$$\hat{a}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i,j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \sum_{k=1}^{N} \xi_t(i,k)}$$

Нам также нужна формула для пересчета вероятности наблюдения. Это вероятность данного символа v_k из словаря наблюдения V при заданном состоянии j: $\hat{b}_j(v_k)$. Мы сделаем это, пытаясь вычислить:

$$\hat{b}_j(v_k) = \frac{\text{ожидаемое число попаданий в состояние } j \text{ и наблюдения символа } v_k}{\text{ожидаемое число попаданий в состояние } j}.$$

Для этого нам нужно знать вероятность нахождения в состоянии *j* в момент времени *t*, который обозначим как $\gamma_t(j)$:

$$\gamma_t(j) = P\left(q_t = j \mid O, \lambda\right).$$

Еще раз, мы вычислим это, включив последовательность наблюдения в вероятность:

$$\gamma_t(j) = \frac{P\left(q_t = j, O \mid \lambda\right)}{P\left(O \mid \lambda\right)}. \tag{E.7}$$

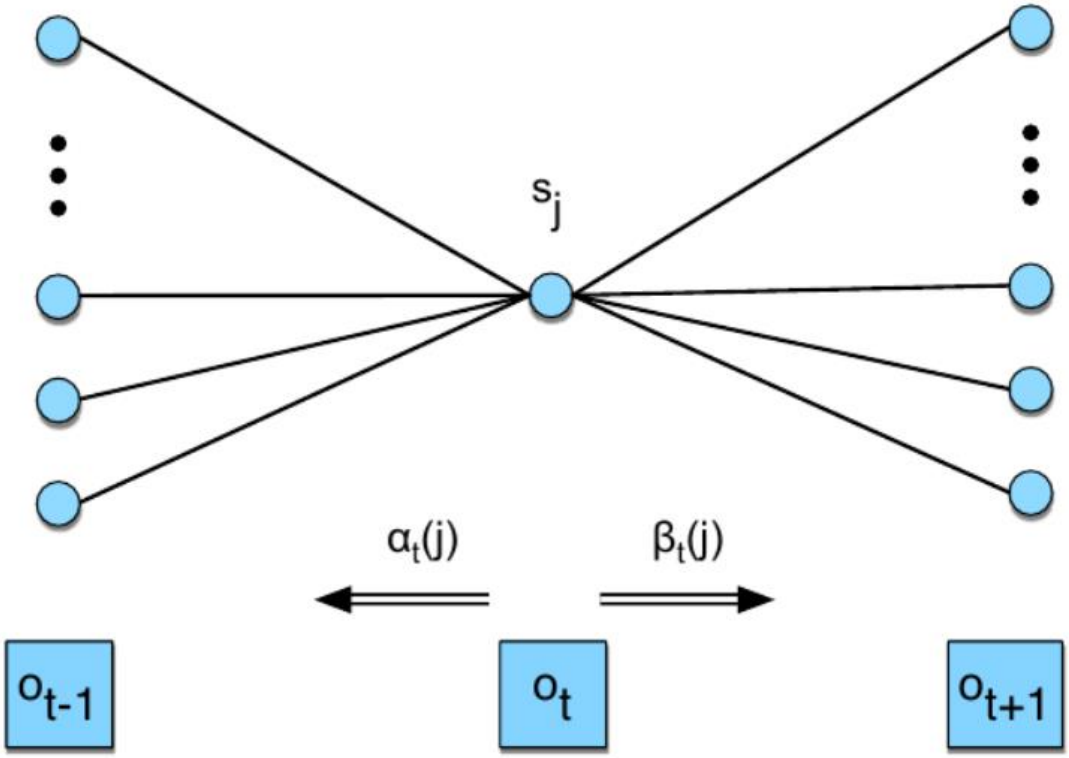


Рисунок E.4 – Вычисление $\gamma_t(j)$, вероятности нахождения в состоянии *j* в момент времени *t*. Обратите внимание, что γ действительно является вырожденным случаем ξ, и, следовательно, этот рисунок похож на версию Рисунка E.3 с состоянием *i*, свернутым с состоянием *j*. [127, 93].

Как показано на Рисунке E.4, числитель уравнения (E.7) является просто произведением прямой переменной и обратной переменной:

$$\gamma_t(j) = \frac{\alpha_t(j)\beta_t(j)}{P(O|\lambda)}.$$

Мы готовы вычислить b. Для числителя мы суммируем $\gamma_t(j)$ для всех временных шагов t, в которых наблюдение o_t является интересующим нас символом v_k. Для знаменателя мы суммируем $\gamma_t(j)$ по всем временным шагам t. Результатом является процентное соотношение времени, в течение которого мы находились в состоянии j и видели символ v_k (запись $\sum_{t=1\ s.t. O_t=v_k}^{T}$ означает «сумма по всем t, для которых наблюдением в момент времени t было v_k»):

$$\hat{b}_j(v_k) = \frac{\sum\limits_{t=1\ s.t. O_t=v_k}^{T} \gamma_k(j)}{\sum\limits_{t=1}^{T} \gamma_k(j)}.$$

Эти переоценки составляют ядро итеративного алгоритма прямого-обратного хода.

function FORWARD-BACKWARD(*observations* of len T, *output vocabulary* V, *hidden state set* Q) **returns** *HMM=(A,B)*

initialize A and B
iterate until convergence
E-step

$$\gamma_t(j) = \frac{\alpha_t(j)\beta_t(j)}{\alpha_T(q_F)} \quad \forall\, t \text{ and } j$$

$$\xi_t(i,j) = \frac{\alpha_t(i)\, a_{ij} b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)}{\alpha_T(q_F)} \quad \forall\, t,\ i, \text{ and } j$$

M-step

$$\hat{a}_{ij} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{T-1} \xi_t(i,j)}{\sum\limits_{t=1}^{T-1} \sum\limits_{k=1}^{N} \xi_t(i,k)}$$

$$\hat{b}_j(v_k) = \frac{\sum\limits_{t=1 s.t.\ O_t=v_k}^{T} \gamma_t(j)}{\sum\limits_{t=1}^{T} \gamma_t(j)}$$

return A, B

Рисунок Е.5 – Алгоритм прямого-обратного хода. [93].

Алгоритм прямого-обратного хода (Рисунок Е.5) начинается с некоторой начальной оценки параметров СММ λ = (A, B). Затем мы итеративно выполняем два шага. Как и в других случаях алгоритма EM (ожидание-максимизация), алгоритм прямого-обратного хода имеет два шага: шаг ожидания (the **expectation**) или **E-шаг** и шаг максимизации (the **maximization**) или **M-шаг**.

На шаге E мы вычисляем ожидаемый счетчик занятости состояний γ и ожидаемый счетчик переходов состояний ξ из более ранних вероятностей A и B. На M-шаге мы используем γ и ξ для пересчета новых вероятностей A и B.

Приложение Ж

Решение задач СММ для вектора сигналов $\overline{s}_{30}$ скрытой модели, описанной в Главе 4.3

Рассмотрим систему *S*, для которой перед началом её функционирования принято, что СВ $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ имеют распределение Эрланга IV порядка и $M\alpha_1 = 28{,}57$ ч., $M\alpha_2 = 25$ ч., $M\beta_1 = 2$ ч., $M\beta_2 = 1{,}6$ ч. Групповой мгновенно пополняемый резерв времени $h = 1{,}5$ часа.

Предположим, что в результате функционирования системы *S* получен следующий вектор сигналов:

$$\overline{s}_{30} = \left(2,1,0,1,2,1,0,0,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,0,1,2,1,2,1,2,1,2,1,0\right),\ n=30.$$

Рассмотрим задачи по оценке характеристик скрытой марковской модели с учетом введённых параметров.

1. Определим вероятности состояний скрытой модели в момент испускания 30-го сигнала. Воспользуемся формулой [128, 127]:

$$P\left(X_n = i \mid \overline{S}^n = \overline{s}_n\right) = \frac{F_n(i)}{\sum_j F_n(j)}. \qquad (Ж.1)$$

В результате получаем, что на 30-ом шаге укрупнённая модель с вероятностью 1 находилась в состоянии 00. Для состояний 11, 10, 01, $\overline{00}$ эта вероятность равна нулю.

2. Найдём вероятности, с которыми скрытая модель осуществит переход в состояния на следующем 31-ом шаге. Для этого используем формулу [128, 127]:

$$P(X_{n+1} = j \mid \overline{s}_n) = \sum_i P(X_n = i \mid \overline{s}_n) P_i^j, \qquad (Ж.2)$$

Получаем следующие вероятности перехода скрытой модели на 31-ом шаге: в состояние 10 с вероятностью 0,3369, 01 – 0,5100, $\overline{00}$ – 0,1531; во все остальные – с нулевой вероятностью.

3. Определим вероятности появления сигналов на следующем 31-ом шаге, применим формулу [128, 127]:

$$P(S_{n+1} = s_{n+1} \mid \overline{s}_n) = \sum_i P(X_{n+1} = i \mid \overline{s}_n) R\left(s_{n+1} \mid i\right), \qquad (Ж.3)$$

при этом используется формула (Ж.2).

Получаем следующие вероятности появления сигналов на 31-м шаге: сигнал 1 с вероятностью 0,8469, 0 – 0,1531, 2 – 0.

4. Найдем вероятность появления (испускания) полученного вектора сигналов $\overline{s}_{30}$.

Для этого можно использовать формулы [128, 127]:

$$P\left(\overline{S}^n = \overline{s}_n\right) = \sum_i F_n(i) = \sum_i R(s_1 \mid i) B_1(i) p_i, \qquad (Ж.4)$$

а также

$$P\left(\overline{S}^n = \overline{s}_n\right) = \sum_i F_k(i) B_k(i), \qquad (Ж.5)$$

при любом фиксированном *k*.

Вероятность появления полученного вектора сигналов $\overline{s}_{30}$ равна $8{,}8759 * 10^{-7}$.

5. Прогнозирование состояний скрытой модели по полученному вектору сигналов.

На основании полученного вектора сигналов $\overline{s}_{30}$ необходимо найти наиболее вероятные состояния скрытой модели на переходах. Для решения этой задачи используется формула [128, 127]:

$$P\left(X_k = i \mid \overline{S}^k = \overline{s}_k\right) = \frac{F_k(i) B_k(i)}{\sum_j F_k(j) B_k(j)}. \qquad (Ж.6)$$

Таким образом, необходимо найти *i*, которое максимизирует выражение $F_k(i) B_k(i)$.

В Таблице Ж.1 указаны наиболее вероятные состояния скрытой модели на указанных в ней переходах и вероятности этих состояний.

Покажем влияние величины группового мгновенно пополняемого резерва времени на вероятность появления полученного вектора сигналов

$$\overline{s}_{30} = \left(2,1,0,1,2,1,0,0,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,0,1,2,1,2,1,2,1,2,1,0\right).$$

Результаты представлены в Таблице Ж.2.

Таблица Ж.1

Наиболее вероятные состояния скрытой модели на переходах

Номер перехода	1	2	4	9	14	23	29	30
Наиболее вероятное состояние	11	01	01	01	11	10	01	00
Вероятность состояния	1,000	0,550	0,597	0,572	1,000	0,539	0,550	1,000

Таблица Ж.2

Вероятность появления $\overline{s}_{30}$ при различных значениях резерва времени

	h=1,5 часа	h=1,1 часа	h=0,7 часа	h=0,3 часа
$P\left(\overline{S}^n = \overline{s}_n\right)$	$8{,}8759 * 10^{-7}$	$1{,}1974 * 10^{-6}$	$8{,}5823 * 10^{-7}$	$1{,}9706 * 10^{-7}$

Используя алгоритм Баума-Велша [68, 127, 97] можно уточнить начальные параметры модели, чтоб они наиболее точно согласовывались с полученным вектором сигналов.

Применяя этот алгоритм, получаем уточненную матрицу переходных вероятностей для рассматриваемой системы. На Рисунке Ж.1 представлены: а) исходная матрица переходных вероятностей P_i^j, б) уточненная матрица переходных вероятностей $\overline{P}_i^j$.

$$P_i^j = \begin{pmatrix} 0 & 0,5333 & 0,4667 & 0 & 0 \\ 0,9470 & 0 & 0 & 0,0530 & 0 \\ 0,9260 & 0 & 0 & 0,0740 & 0 \\ 0 & 0,3369 & 0,5100 & 0 & 0,1531 \\ 0 & 0,4221 & 0,5779 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

а)

$$\overline{P}_i^{\,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0,5066 & 0,4934 & 0 & 0 \\ 0,7355 & 0 & 0 & 0,2645 & 0 \\ 0,6942 & 0 & 0 & 0,3058 & 0 \\ 0 & 0,2688 & 0,3979 & 0 & 0,3333 \\ 0 & 0,4276 & 0,5724 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

б)

Рисунок Ж.1 – Матрицы переходных вероятностей

Применяя алгоритм Витерби [137, 127, 97] к уточненной модели, определяем наиболее вероятную цепочку состояний для полученного вектора сигналов: 11, 10, 00, 01, 11, 10, 00, $\overline{00}$, 01, 11, 10, 11, 10, 11, 10, 11, 10, 11, 10, 00, 01, 11, 10, 11, 10, 11, 10, 11, 10, 00.

Приложение 3

Программа в пакете Maple для решения задач теории СММ

> $\lambda 1 := 0.14$

$$\lambda 1 := 0.14$$

> $\lambda 2 := 0.16$

$$\lambda 2 := 0.16$$

> $\mu 1 := 2$

$$\mu 1 := 2$$

> $\mu 2 := 2.5$

$$\mu 2 := 2.5$$

Зададим величины резерва времени:

$h := 1.5$

$$1.5$$

Распределение Эрланга порядка m1:

$m1 := 4;$

$$4$$

$F1 := \mathbf{proc}(x)\ \mathbf{local}\ i;\ 1 - e^{-\lambda 1 \cdot x} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{m1-1} \frac{(\lambda 1 \cdot x)^i}{i!}\right)\ \mathbf{end\ proc}$

```
proc(x)
    local i;
    1 - exp( - λ1*x) * (1 + sum((λ1*x)^i/factorial(i), i = 1
    ..m1 - 1))
end proc
```

> $F1(x)$

$$1 - e^{-0.14\,x}\left(1 + 0.1400000000\,x + 0.009800000000\,x^2 + 0.0004573333333\,x^3\right)$$

> $f1 := \mathbf{proc}(x)\ \lambda 1 \cdot e^{-\lambda 1 \cdot x} \cdot \frac{(\lambda 1 \cdot x)^{m1-1}}{(m1-1)!}\ \mathbf{end\ proc}$

```
f1 := proc(x)
    λ1*exp( - λ1*x) * (λ1*x)^(m1 - 1)/factorial(m1 - 1)
end proc
```

> $F2 := \mathbf{proc}(x)\ \mathbf{local}\ i;\ 1 - e^{-\lambda 2 \cdot x} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{m1-1} \frac{(\lambda 2 \cdot x)^i}{i!}\right)\ \mathbf{end\ proc}$

```
F2 := proc(x)
    local i;
    1 - exp( - λ2*x) * (1 + sum((λ2*x)^i/factorial(i), i = 1
    ..m1 - 1))
end proc
```

> $f2 := \mathbf{proc}(x)\ \lambda 2 \cdot e^{-\lambda 2 \cdot x} \cdot \frac{(\lambda 2 \cdot x)^{m1-1}}{(m1-1)!}$ **end proc**

```
f2 := proc(x)
    λ2*exp(-λ2*x)*(λ2*x)^(m1-1)/factorial(m1-1)
end proc
```

> $G1 := \mathbf{proc}(x)\ \mathbf{local}\ i;\ 1 - e^{-\mu 1 \cdot x} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{m1-1} \frac{(\mu 1 \cdot x)^i}{i!}\right)$ **end proc**

```
G1 := proc(x)
    local i;
    1 - exp(-μ1*x)*(1 + sum((μ1*x)^i/factorial(i), i = 1
    ..m1 - 1))
end proc
```

> $G1(t)$

$$1 - e^{-2t}\left(1 + 2t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3\right)$$

> $G1(0)$

$$0$$

> $g1 := \mathbf{proc}(x)\ \mu 1 \cdot e^{-\mu 1 \cdot x} \cdot \frac{(\mu 1 \cdot x)^{m1-1}}{(m1-1)!}$ **end proc**

```
g1 := proc(x)
    μ1*exp(-μ1*x)*(μ1*x)^(m1-1)/factorial(m1-1)
end proc
```

> $G2 := \mathbf{proc}(x)\ \mathbf{local}\ i;\ 1 - e^{-\mu 2 \cdot x} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{m1-1} \frac{(\mu 2 \cdot x)^i}{i!}\right)$ **end proc**

```
G2 := proc(x)
    local i;
    1 - exp(-μ2*x)*(1 + sum((μ2*x)^i/factorial(i), i = 1
    ..m1 - 1))
end proc
```

> $G2(h)$

$$0.5162326184$$

> $g2 := \mathbf{proc}(x)\ \mu 2 \cdot e^{-\mu 2 \cdot x} \cdot \frac{(\mu 2 \cdot x)^{m1-1}}{(m1-1)!}$ **end proc**

```
g2 := proc(x)
    μ2*exp(-μ2*x)*(μ2*x)^(m1-1)/factorial(m1-1)
end proc
```

> $M\alpha 1 := \frac{m1}{\lambda 1}$

$$M\alpha 1 := 28.57142857$$

> $M\alpha 2 := \frac{m1}{\lambda 2}$

$$M\alpha 2 := 25.00000000$$

> $M\beta 1 := \frac{m1}{\mu 1}$

$$M\beta 1 := 2$$

> $M\beta 2 := \frac{m1}{\mu 2}$

$$M\beta 2 := 1.600000000$$

Укрупненные вероятности перехода:

> $\rho 11 := M\alpha 1 + M\alpha 2$

$$\rho 11 := 53.57142857$$

> $\rho 10 := M\alpha 1 + M\beta 2$

$$\rho 10 := 30.17142857$$

> $\rho 01 := M\alpha 2 + M\beta 1$

$$\rho 01 := 27.00000000$$

> $\rho 00 := M\beta 1 + M\beta 2$

$$\rho 00 := 3.600000000$$

> $\rho 22 := (1 - G1(h)) \cdot M\beta 2 + (1 - G2(h)) \cdot M\beta 1$

$$\rho 22 := 2.003105785$$

> $p1110 := \frac{M\alpha 1}{\rho 11}$

$$p1110 := 0.5333333333$$

> $p1101 := \frac{M\alpha 2}{\rho 11}$

$$p1101 := 0.4666666667$$

> $p0111 := \frac{M\alpha 2}{\rho 01}$

$$p0111 := 0.9259259259$$

> $p0100 := \frac{M\beta 1}{\rho 01}$

$$p0100 := 0.07407407407$$

> $p1011 := \frac{M\alpha 1}{\rho 10}$

$$p1011 := 0.9469696970$$

> $p1000 := \frac{M\beta 2}{\rho 10}$

$$p1000 := 0.05303030303$$

> $p2210 := \frac{1}{\rho 22}\left(\int_0^\infty (1 - G2(y)) \int_0^y g1(h+t)\, dt dy + \int_0^\infty (1 - G1(y)) \int_y^\infty g2(h+t)\, dt dy\right)$

$$p2210 := 0.4221433553$$

> $p2201 := \frac{1}{\rho 22}\left(\int_0^\infty (1 - G2(y)) \int_y^\infty g1(h+t)\, dt dy + \int_0^\infty (1 - G1(y)) \int_0^y g2(h+t)\, dt dy\right)$

$$p2201 := 0.5778566448$$

> $p0022 := \frac{1}{\rho 00}\left((1 - G1(h))\cdot\int_h^\infty (1 - G2(x))\mathrm{d}x + (1 - G2(h))\cdot \int_h^\infty (1 - G1(x))\mathrm{d}x\right)$

$$p0022 := 0.1530875556$$

> $p0001 := \frac{(1 - G1(h))\cdot\int_0^h (1 - G2(x))\mathrm{d}x + G2(h)\cdot\int_0^\infty (1 - G1(x))\mathrm{d}x}{\rho 00}$

$$p0001 := 0.5100144656$$

> $p0010 := \frac{G1(h)\cdot\int_0^\infty (1 - G2(x))\mathrm{d}x + (1 - G2(h))\cdot\int_0^h (1 - G1(x))\mathrm{d}x}{\rho 00}$

$$p0010 := 0.3368979792$$

> $p0022 + p0010 + p0001$

$$1.000000000$$

Матрица переходных вероятностей:

> $MVP := \begin{bmatrix} 0 & p1110 & p1101 & 0 & 0 \\ p1011 & 0 & 0 & p1000 & 0 \\ p0111 & 0 & 0 & p0100 & 0 \\ 0 & p0010 & p0001 & 0 & p0022 \\ 0 & p2210 & p2201 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$MVP := [[0, 0.5333333333, 0.4666666667, 0, 0], [0.9469696970, 0, 0, 0.05303030303, 0], [0.9259259259, 0, 0, 0.07407407407, 0], [0, 0.3368979792, 0.5100144656, 0, 0.1530875556], [0, 0.4221433553, 0.5778566448, 0, 0]]$$

Функция связи:

```
>
R := proc(s, i)
 if ((i = 1) and (s = 2))
 then return 1;
end if;
if ((i = 2) and (s = 1))
 then return 1;
end if;
if ((i = 3) and (s = 1))
 then return 1;
end if;
if ((i = 4) and (s = 0))
 then return 1;
end if; if ((i = 5) and (s = 0))
 then return 1;
end if;
return 0
 end proc
```

```
R := proc(s, i)
    if i = 1 and s = 2 then return 1 end if;
    if i = 2 and s = 1 then return 1 end if;
    if i = 3 and s = 1 then return 1 end if;
    if i = 4 and s = 0 then return 1 end if;
    if i = 5 and s = 0 then return 1 end if;
    return 0
end proc
```

```
> R(2, 1)
                                    1
> R(1 , 1)
                                    0
> R(1, 2)
                                    1
> R(1, 3)
                                    1
> R(1, 4)
                                    0
> R(1, 5)
                                    0
> R(2, 1)
                                    1
> R(2, 2)
                                    0
> R(2, 3)
                                    0
> R(2, 4)
                                    0
```

Зададим вектор сигналов:

> $signals := [2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 1,$
$2, 1, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1,$
$0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1,$
$2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1,$
$2, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0]$

$$signals := [2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0]$$

> $FV := Matrix(5, 100)$

$$FV := \begin{bmatrix} \text{5 x 100 Matrix} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran\_order} \end{bmatrix}$$

> $BV := Matrix(5, 100)$

$$BV := \begin{bmatrix} \text{5 x 100 Matrix} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran\_order} \end{bmatrix}$$

> $signals[3]$

$$0$$

Зададим начальное распределение:

> $p0 := [1, 0, 0, 0, 0]$

$$p0 := [1, 0, 0, 0, 0]$$

Переменные прямого хода:

> $F1 :=$ **proc**(i) **return** $p0[i] \cdot R(signals[1], i)$ **end proc**

$$F1 := \textbf{proc}(i)\ \textbf{return}\ p0[i] * R(signals[1], i)\ \textbf{end proc}$$

> $F1(1)$

$$1$$

> $F1(3)$

$$0$$

> **for** i **from** 1 **to** 5 **do** $FV[\mathrm{i}, 1] := \mathrm{F1}(\mathrm{i});$ **od**

$$FV_{1,1} := 1$$
$$FV_{2,1} := 0$$
$$FV_{3,1} := 0$$
$$FV_{4,1} := 0$$
$$FV_{5,1} := 0$$

> $F2 :=$ **proc**$(j :: integer)$
return $R(signals[2], j) \cdot (F1(1) \cdot MVP[1, \mathrm{j}] + F1(2) \cdot MVP[2, \mathrm{j}]$
$+ F1(3) \cdot MVP[3, \mathrm{j}] + F1(4) \cdot MVP[4, \mathrm{j}] + F1(5) \cdot MVP[5, \mathrm{j}]);$
end proc

```
F2 := proc(j::integer)
    return R(signals[2],j) * (F1(1) * MVP[1,j] + F1(2) * MVP[2,j]
     + F1(3) * MVP[3,j] + F1(4) * MVP[4,j] + F1(5) * MVP[5,j])
end proc
```

```
> for i from 1 to 5 do FV[i, 2] := F2(i); od
```

$$FV_{1,2} := 0.$$
$$FV_{2,2} := 0.5333333333$$
$$FV_{3,2} := 0.4666666667$$
$$FV_{4,2} := 0.$$
$$FV_{5,2} := 0.$$

```
F3 := proc(j :: integer)
return R(signals[3],j) · (F2(1) · MVP[1, j] + F2(2) · MVP[2, j]
    + F2(3) · MVP[3, j] + F2(4) · MVP[4, j] + F2(5) · MVP[5, j]);
end proc
```

```
proc(j::integer)
    return R(signals[3],j) * (F2(1) * MVP[1,j] + F2(2) * MVP[2,j]
     + F2(3) * MVP[3,j] + F2(4) * MVP[4,j] + F2(5) * MVP[5,j])
end proc
```

```
for i from 1 to 5 do FV[i, 3] := F3(i); od
```

$$0.$$
$$0.$$
$$0.$$
$$0.06285072952$$
$$0.$$

```
> F4 := proc(j :: integer)
  return R(signals[4],j) · (F3(1) · MVP[1, j] + F3(2) · MVP[2, j]
      + F3(3) · MVP[3, j] + F3(4) · MVP[4, j] + F3(5) · MVP[5, j]);
  end proc
```

```
F4 := proc(j::integer)
    return R(signals[4],j) * (F3(1) * MVP[1,j] + F3(2) * MVP[2,j]
     + F3(3) * MVP[3,j] + F3(4) * MVP[4,j] + F3(5) * MVP[5,j])
end proc
```

```
> for i from 1 to 5 do FV[i, 4] := F4(i); od
```

$$FV_{1,4} := 0.$$
$$FV_{2,4} := 0.02117428377$$
$$FV_{3,4} := 0.03205478123$$
$$FV_{4,4} := 0.$$
$$FV_{5,4} := 0.$$

```
> F5 := proc(j :: integer)
  return R(signals[5],j) · (F4(1) · MVP[1, j] + F4(2) · MVP[2, j]
      + F4(3) · MVP[3, j] + F4(4) · MVP[4, j] + F4(5) · MVP[5, j]);
  end proc
```

```
F5 := proc(j::integer)
    return R(signals[5], j) * (F4(1) * MVP[1, j] + F4(2) * MVP[2, j]
     + F4(3) * MVP[3, j] + F4(4) * MVP[4, j] + F4(5) * MVP[5, j])
end proc
```

```
> for i from 1 to 5 do FV[i, 5] := F5(i); od
```

$$FV_{1,5} := 0.04973175808$$

$$FV_{2,5} := 0.$$

$$FV_{3,5} := 0.$$

$$FV_{4,5} := 0.$$

$$FV_{5,5} := 0.$$

```
sz := 30
```

$$30$$

```
for k from 4 to sz do
FV[1, k] := R(signals[k], 1) · (FV[1, k − 1] · MVP[1, 1] + FV[2, k
    − 1] · MVP[2, 1] + FV[3, k − 1] · MVP[3, 1] + FV[4, k − 1]
    · MVP[4, 1] + FV[5, k − 1] · MVP[5, 1]);
FV[2, k] := R(signals[k], 2) · (FV[1, k − 1] · MVP[1, 2] + FV[2, k
    − 1] · MVP[2, 2] + FV[3, k − 1] · MVP[3, 2] + FV[4, k − 1]
    · MVP[4, 2] + FV[5, k − 1] · MVP[5, 2]);
FV[3, k] := R(signals[k], 3) · (FV[1, k − 1] · MVP[1, 3] + FV[2, k
    − 1] · MVP[2, 3] + FV[3, k − 1] · MVP[3, 3] + FV[4, k − 1]
    · MVP[4, 3] + FV[5, k − 1] · MVP[5, 3]);
FV[4, k] := R(signals[k], 4) · (FV[1, k − 1] · MVP[1, 4] + FV[2, k
    − 1] · MVP[2, 4] + FV[3, k − 1] · MVP[3, 4] + FV[4, k − 1]
    · MVP[4, 4] + FV[5, k − 1] · MVP[5, 4]);
FV[5, k] := R(signals[k], 5) · (FV[1, k − 1] · MVP[1, 5] + FV[2, k
    − 1] · MVP[2, 5] + FV[3, k − 1] · MVP[3, 5] + FV[4, k − 1]
    · MVP[4, 5] + FV[5, k − 1] · MVP[5, 5]);
od
```

$$0.$$

$$0.02117428377$$

$$0.03205478123$$

$$0.$$

$$0.$$

$$0.04973175808$$

$$0.$$

$$0.$$

$$0.$$

$$0.$$

$$0.$$

$$0.02652360431$$

$$0.02320815377$$

$$0.$$

$$0.$$

$$0.$$

0.

0.

0.003125677275

0.

0.

0.

0.

0.

0.0004785022936

0.

0.0002019965637

0.0002765057299

0.

0.

0.0004473084487

0.

0.

0.

0.

0.

0.0002385645060

0.0002087439427

0.

0.

0.0004191947864

0.

0.

0.

0.

0.

0.0002235705527

0.0001956242337

0.

0.

0.0003928480882

0.

0.

0.

0.

0.

0.0002095189804

0.0001833291078

0.

0.

0.0003681572993

0.

0.

0.

0.

0.

0.0001963505596

0.0001718067397

0.

0.

0.0003450183444

0.

0.

0.

0.

0.

0.0001840097837

0.0001610085607

0.

0.

0.

0.

0.

0.00002168465464

0.

0.

0.000007305516328

0.00001105948755

0.

0.

0.00001715836883

0.

0.

0.

0.

0.

0.000009151130042

0.000008007238788

0.

0.

0.00001607995283

0.

0.

0.

0.

0.

0.000008575974842

0.000007503977988

0.

0.

0.00001506931606

0.

0.

0.

0.

0.

0.000008036968565

0.000007032347495

0.

0.

0.00001412219855

0.

0.

0.

0.

0.

0.000007531839226

0.000006590359324

0.

0.

0.

0.

0.

$8.875904812\ 10^{-7}$

0.

Вероятности состояний СММ в момент испускания 30-го сигнала:

> $P1 := \dfrac{FV[1, sz]}{FV[1, sz] + FV[2, sz] + FV[3, sz] + FV[4, sz] + FV[5, sz]}$

$P1 := 0.$

> $P2 := \dfrac{FV[2, sz]}{FV[1, sz] + FV[2, sz] + FV[3, sz] + FV[4, sz] + FV[5, sz]}$

$P2 := 0.$

> $P3 := \dfrac{FV[3, sz]}{FV[1, sz] + FV[2, sz] + FV[3, sz] + FV[4, sz] + FV[5, sz]}$

$P3 := 0.$

> $P4 := \dfrac{FV[4, sz]}{FV[1, sz] + FV[2, sz] + FV[3, sz] + FV[4, sz] + FV[5, sz]}$

$P4 := 1.000000000$

> $P5 := \dfrac{FV[5, sz]}{FV[1, sz] + FV[2, sz] + FV[3, sz] + FV[4, sz] + FV[5, sz]}$

$P5 := 0.$

Вероятности перехода в состояния на следующем sz+1 (31-ом) шаге:

> $Pnext1 := P1 \cdot MVP[1, 1] + P2 \cdot MVP[2, 1] + P3 \cdot MVP[3, 1] + P4 \cdot MVP[4, 1] + P4 \cdot MVP[4, 1]$

$Pnext1 := 0.$

> $Pnext2 := P1 \cdot MVP[1, 2] + P2 \cdot MVP[2, 2] + P3 \cdot MVP[3, 2] + P4 \cdot MVP[4, 2] + P5 \cdot MVP[5, 2]$

$Pnext2 := 0.3368979792$

> $Pnext3 := P1 \cdot MVP[1, 3] + P2 \cdot MVP[2, 3] + P3 \cdot MVP[3, 3] + P4 \cdot MVP[4, 3] + P5 \cdot MVP[5, 3]$

$Pnext3 := 0.5100144656$

> $Pnext4 := P1 \cdot MVP[1, 4] + P2 \cdot MVP[2, 4] + P3 \cdot MVP[3, 4] + P4 \cdot MVP[4, 4] + P5 \cdot MVP[5, 4]$

$Pnext4 := 0.$

> $Pnext5 := P1 \cdot MVP[1, 5] + P2 \cdot MVP[2, 5] + P3 \cdot MVP[3, 5] + P4 \cdot MVP[4, 5] + P5 \cdot MVP[5, 5]$

$Pnext5 := 0.1530875556$

> $Pnext2 + Pnext3 + Pnext5$

1.000000000

Вероятность появления сигналов на шаге sz+1 (31-ом шаге):

$Rnext2 := Pnext1 \cdot R(2, 1) + Pnext2 \cdot R(2, 2) + Pnext3 \cdot R(2, 3) + Pnext4 \cdot R(2, 4) + Pnext5 \cdot R(2, 5)$

$0.$

$$Rnext1 := Pnext1 \cdot R(1,1) + Pnext2 \cdot R(1,2) + Pnext3 \cdot R(1,3) + Pnext4 \cdot R(1,4) + Pnext5 \cdot R(1,5)$$

$$0.8469124448$$

$$Rnext0 := Pnext1 \cdot R(0,1) + Pnext2 \cdot R(0,2) + Pnext3 \cdot R(0,3) + Pnext4 \cdot R(0,4) + Pnext5 \cdot R(0,5)$$

$$0.1530875556$$

Обратные переменные:

$Bl :=$ **proc**(i)
$R(signals[\mathrm{sz}], 1) \cdot MVP[i, 1] + R(signals[\mathrm{sz}], 2) \cdot MVP[i, 2]$
$\quad + R(signals[\mathrm{sz}], 3) \cdot MVP[i, 3] + R(signals[\mathrm{sz}], 4) \cdot MVP[i, 4]$
$\quad + R(signals[\mathrm{sz}], 5) \cdot MVP[i, 5]$
end proc

proc(i)
$R(signals[sz], 1) * MVP[i, 1] + R(signals[sz], 2) * MVP[i, 2]$
$+ R(signals[sz], 3) * MVP[i, 3] + R(signals[sz], 4) * MVP[i, 4]$
$+ R(signals[sz], 5) * MVP[i, 5]$
end proc

for i **from** 1 **to** 5 **do** $BV[i, 1] := Bl(i);$ **od**

$$0.$$
$$0.05303030303$$
$$0.07407407407$$
$$0.1530875556$$
$$0.$$

$t := 1$

$$1$$

for k **from** 2 **to** $sz - 1$ **do**
$t := \mathrm{sz} - k;$
$BV[1,k] := R(signals[t+1],1)\cdot BV[1,k-1]\cdot MVP[1,1] + R(signals[t+1],2)\cdot BV[2,k-1]\cdot MVP[1,2] + R(signals[t+1],3)\cdot BV[3,k-1]\cdot MVP[1,3] + R(signals[t+1],4)\cdot BV[4,k-1]\cdot MVP[1,4] + R(signals[t+1],5)\cdot BV[5,k-1]\cdot MVP[1,5];$
$BV[2,k] := R(signals[t+1],1)\cdot BV[1,k-1]\cdot MVP[2,1] + R(signals[t+1],2)\cdot BV[2,k-1]\cdot MVP[2,2] + R(signals[t+1],3)\cdot BV[3,k-1]\cdot MVP[2,3] + R(signals[t+1],4)\cdot BV[4,k-1]\cdot MVP[2,4] + R(signals[t+1],5)\cdot BV[5,k-1]\cdot MVP[2,5];$
$BV[3,k] := R(signals[t+1],1)\cdot BV[1,k-1]\cdot MVP[3,1] + R(signals[t+1],2)\cdot BV[2,k-1]\cdot MVP[3,2] + R(signals[t+1],3)\cdot BV[3,k-1]\cdot MVP[3,3] + R(signals[t+1],4)\cdot BV[4,k-1]\cdot MVP[3,4] + R(signals[t+1],5)\cdot BV[5,k-1]\cdot MVP[3,5];$
$BV[4,k] := R(signals[t+1],1)\cdot BV[1,k-1]\cdot MVP[4,1] + R(signals[t+1],2)\cdot BV[2,k-1]\cdot MVP[4,2] + R(signals[t+1],3)\cdot BV[3,k-1]\cdot MVP[4,3] + R(signals[t+1],4)\cdot BV[4,k-1]\cdot MVP[4,4] + R(signals[t+1],5)\cdot BV[5,k-1]\cdot MVP[4,5];$
$BV[5,k] := R(signals[t+1],1)\cdot BV[1,k-1]\cdot MVP[5,1] + R(signals[t+1],2)\cdot BV[2,k-1]\cdot MVP[5,2] + R(signals[t+1],3)\cdot BV[3,k-1]\cdot MVP[5,3] + R(signals[t+1],4)\cdot BV[4,k-1]\cdot MVP[5,4] + R(signals[t+1],5)\cdot BV[5,k-1]\cdot MVP[5,5];$
od

28

0.06285072952

0.

0.

0.05564465123

0.06519058596

27

0.

0.05951773629

0.05819511992

0.

0.

26

0.05890051532

0.

0.

0.04973175807

0.05875345364

25

0.

0.05577700315

0.05453751418

0.

0.

24

0.05519857496

0.

0.

0.04660608080

0.05506075622

23

0.

0.05227137780

0.05110979163

0.

0.

22

0.05172930426

0.

0.

0.04367685462

0.05160014752

21

0.

0.04898608358

0.04789750394

0.

0.

20

0.04847807975

0.

0.

0.04093173245

0.04835704061

19

0.

0.002170622175

0.003031980181

0.007402861143

0.

18
0.002572589245
0.
0.
0.002277631976
0.002668363622
17
0.
0.002436164058
0.002382027079
0.
0.
16
0.002410900135
0.
0.
0.002035607016
0.002404880646
15
0.
0.002283049370
0.002232314940
0.
0.
14
0.002259373303
0.
0.
0.001907667630
0.002253732142
13
0.
0.002139558052
0.002092012318
0.
0.
12
0.002117370043
0.
0.

0.001787769328

0.002112083434

11

0.

0.002005085268

0.001960527818

0.

0.

10

0.001984291792

0.

0.

0.001675406722

0.001979337450

9

0.

0.001879064197

0.001837307215

0.

0.

8

0.001859577606

0.

0.

0.001570106188

0.001854934648

7

0.

0.00008326320694

0.0001163041621

0.0002839674111

0.

6

0.

0.00001505887786

0.00002103462304

0.

0.

5

0.00001784755894

0.

0.

0.00001580126755

0.00001851200192

4

0.

0.00001690109748

0.00001652551754

0.

0.

3

0.00001672582684

0.

0.

0.00001412219858

0.00001668406612

2

0.

$7.489044701\ 10^{-7}$

0.000001046088784

0.000002554122900

0.

1

$8.875904833\ 10^{-7}$

0.

0.

$7.858248147\ 10^{-7}$

$9.206344007\ 10^{-7}$

Вероятность появления (испускания) полученного вектора сигналов:

$$FV[1,4]\cdot BV[1,sz-4]+FV[2,4]\cdot BV[2,sz-4]+FV[3,4]\cdot BV[3,sz-4]+FV[4,4]\cdot BV[4,sz-4]+FV[5,4]\cdot BV[5,sz-4]$$

$8.875904836\ 10^{-7}$

$$FV[1,3]\cdot BV[1,sz-3]+FV[2,3]\cdot BV[2,sz-3]+FV[3,3]\cdot BV[3,sz-3]+FV[4,3]\cdot BV[4,sz-3]+FV[5,3]\cdot BV[5,sz-3]$$

$8.875904832\ 10^{-7}$

$$FV[1,sz]+FV[2,sz]+FV[3,sz]+FV[4,sz]+FV[5,sz]$$

$8.875904812\ 10^{-7}$

$$U := FV[1,sz]+FV[2,sz]+FV[3,sz]+FV[4,sz]+FV[5,sz]$$

$$8.875904812\ 10^{-7}$$

Прогнозирование состояний скрытой модели по полученному вектору сигналов:

$$U1 := FV[1,1]\cdot BV[1,sz-1] + FV[2,1]\cdot BV[2,sz-1] + FV[3,1]\cdot BV[3,sz-1] + FV[4,1]\cdot BV[4,sz-1] + FV[5,1]\cdot BV[5,sz-1]$$

$$8.875904833\ 10^{-7}$$

Первый переход модели:

$$\frac{FV[1,1]\cdot BV[1,sz-1]}{U1}$$

$$1.000000000$$

$$\frac{FV[2,1]\cdot BV[2,sz-1]}{U1}$$

$$0.$$

$$\frac{FV[3,1]\cdot BV[3,sz-1]}{U1}$$

$$0.$$

$$\frac{FV[4,1]\cdot BV[4,sz-1]}{U1}$$

$$0.$$

$$\frac{FV[5,1]\cdot BV[5,sz-1]}{U1}$$

$$0.$$

2//

$$U2 := FV[1,2]\cdot BV[1,sz-2] + FV[2,2]\cdot BV[2,sz-2] + FV[3,2]\cdot BV[3,sz-2] + FV[4,2]\cdot BV[4,sz-2] + FV[5,2]\cdot BV[5,sz-2]$$

$$8.875904833\ 10^{-7}$$

$$\frac{FV[1,2]\cdot BV[1,sz-2]}{U2}$$

$$0.$$

$$\frac{FV[2,2]\cdot BV[2,sz-2]}{U2}$$

$$0.4499999999$$

$$\frac{FV[3,2]\cdot BV[3,sz-2]}{U2}$$

$$0.5500000001$$

$$\frac{FV[4,2]\cdot BV[4,sz-2]}{U2}$$

$$0.$$

$$\frac{FV[5,2]\cdot BV[5,sz-2]}{U2}$$

$$0.$$

3//

$$U3 := FV[1,3]\cdot BV[1,sz-3] + FV[2,3]\cdot BV[2,sz-3] + FV[3,3]\cdot BV[3,sz-3] + FV[4,3]\cdot BV[4,sz-3] + FV[5,3]\cdot BV[5,sz-3]$$

$8.875904832\ 10^{-7}$

$$\frac{FV[1,3]\cdot BV[1,sz-3]}{U2}$$

0.

$$\frac{FV[2,3]\cdot BV[2,sz-3]}{U}$$

0.

$$\frac{FV[3,3]\cdot BV[3,sz-3]}{U}$$

0.

$$\frac{FV[4,3]\cdot BV[4,sz-3]}{U}$$

1.000000002

$$\frac{FV[5,3]\cdot BV[5,sz-3]}{U}$$

0.

4///

$$\textbf{for } i \textbf{ from } 1 \textbf{ to } 5 \textbf{ do} \frac{FV[\mathrm{i},4]\cdot BV[\mathrm{i},sz-4]}{U} \textbf{ od}$$

0.

0.4031911582

0.5968088445

0.

0.

5///

$$\textbf{for } i \textbf{ from } 1 \textbf{ to } 5 \textbf{ do} \frac{FV[\mathrm{i},5]\cdot BV[\mathrm{i},sz-5]}{U} \textbf{ od}$$

1.000000003

0.

0.

0.

0.

6//

$$\textbf{for } i \textbf{ from } 1 \textbf{ to } 5 \textbf{ do} \frac{FV[\mathrm{i},6]\cdot BV[\mathrm{i},sz-6]}{U} \textbf{ od}$$

0.

0.4500000013

0.5500000015

0.

0.

7///

$$\textbf{for } i \textbf{ from } 1 \textbf{ to } 5 \textbf{ do} \frac{FV[\mathrm{i},7]\cdot BV[\mathrm{i},\mathrm{sz}-7]}{U} \textbf{ od}$$

0.

0.

0.

1.000000003

0.

8//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 8] \cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz} - 8]}{U}$ **od**

0.

0.

0.

0.

1.000000003

9//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 9] \cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz} - 9]}{U}$ **od**

0.

0.4276347244

0.5723652780

0.

0.

10//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 10] \cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz} - 10]}{U}$ **od**

1.000000002

0.

0.

0.

0.

11//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 11] \cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz} - 11]}{U}$ **od**

0.

0.5389221567

0.4610778452

0.

0.

12//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 12] \cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz} - 12]}{U}$ **od**

1.000000002

0.

0.

0.

0.

13//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 13]\cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz}-13]}{U}$ **od**

0.

0.5389221565

0.4610778453

0.

0.

14//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 14]\cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz}-14]}{U}$ **od**

1.000000002

0.

0.

0.

0.

15//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 15]\cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz}-15]}{U}$ **od**

0.

0.5389221565

0.4610778450

0.

0.

16//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 16]\cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz}-16]}{U}$ **od**

1.000000002

0.

0.

0.

0.

17//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 17]\cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz}-17]}{U}$ **od**

0.

0.5389221564

0.4610778450

0.

0.

18//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 18]\cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz}-18]}{U}$ **od**

1.000000001

0.

0.

0.

0.

19//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 19]\cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz}-19]}{U}$ **od**

0.

0.4500000004

0.5500000004

0.

0.

20//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 20]\cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz}-20]}{U}$ **od**

0.

0.

0.

1.000000001

0.

21//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 21]\cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz}-21]}{U}$ **od**

0.

0.4031911574

0.5968088434

0.

0.

22//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 22]\cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz}-22]}{U}$ **od**

1.000000001

0.

0.

0.

0.

23//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 23]\cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz}-23]}{U}$ **od**

0.

0.5389221559

0.4610778446

0.

0.

24//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 24] \cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz} - 24]}{U}$ **od**

1.000000000

0.

0.

0.

0.

25//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 25] \cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz} - 25]}{U}$ **od**

0.

0.5389221560

0.4610778445

0.

0.

26//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 26] \cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz} - 26]}{U}$ **od**

1.000000000

0.

0.

0.

0.

27//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 27] \cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz} - 27]}{U}$ **od**

0.

0.5389221558

0.4610778444

0.

0.

28//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 28] \cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz} - 28]}{U}$ **od**

1.000000000

0.

0.

0.

0.

29//

for i **from** 1 **to** 5 **do** $\frac{FV[\mathrm{i}, 29] \cdot BV[\mathrm{i}, \mathrm{sz} - 29]}{U}$ **od**

0.

0.4500000000

0.5500000000

0.

0.

Алгоритмы Витерби и Баума-Велша

Матрица переходных вероятностей:

> $$MVP := \begin{bmatrix} 0 & p1110 & p1101 & 0 & 0 \\ p1011 & 0 & 0 & p1000 & 0 \\ p0111 & 0 & 0 & p0100 & 0 \\ 0 & p0010 & p0001 & 0 & p0022 \\ 0 & p2210 & p2201 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$MVP := [[0, 0.5333333333, 0.4666666667, 0, 0], [0.9469696970, 0, 0, 0.05303030303, 0], [0.9259259259, 0, 0, 0.07407407407, 0], [0, 0.3368979792, 0.5100144656, 0, 0.1530875556], [0, 0.4221433553, 0.5778566448, 0, 0]]$$

Функция связи:

> $$R := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Зададим вектор сигналов:

> $$s := [2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0]$$

$$s := [2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0]$$

> $p :=$ **proc**(i, j) **return** $MVP[i+1, j+1]$ **end proc**

$$p := \textbf{proc}(i, j)\ \textbf{return}\ MVP[i+1, 1+j]\ \textbf{end proc}$$

> $r :=$ **proc**(s, j) **return** $R(j+1, s+1)$ **end proc**

$$r := \textbf{proc}(s, j)\ \textbf{return}\ R(1+j, s+1)\ \textbf{end proc}$$

> $r(2, 2)$

$$0$$

Начальное распределение:

> $pi0 := [1, 0, 0, 0, 0]$

$$\pi 0 := [1, 0, 0, 0, 0]$$

Прямые переменные:

> $F_1 :=$ **proc**(i) **return** $pi0[i+1] \cdot r(s[1], i)$ **end proc**

$$F_1 := \textbf{proc}(i)\ \textbf{return}\ \pi 0[i+1] * r(s[1], i)\ \textbf{end proc}$$

> $F[1](1)$

$$0$$

> $F_2 :=$ **proc**(j)
return $r(s[2], j) \cdot (F[1](0) \cdot \mathrm{p}(0, \mathrm{j}) + F[1](1) \cdot \mathrm{p}(1, \mathrm{j}) + F[1](2) \cdot \mathrm{p}(2, \mathrm{j}) + F[1](3) \cdot \mathrm{p}(3, \mathrm{j}) + F[1](4) \cdot \mathrm{p}(4, \mathrm{j}))$
end proc

$$F_2 := \textbf{proc}(j)\ \textbf{return}\ r(s[2], j) * (F[1](0) * p(0, j) + F[1](1) * p(1, j) + F[1](2) * p(2, j) + F[1](3) * p(3, j) + F[1](4) * p(4, j))\ \textbf{end proc}$$

> $Fv[1] := [F[1](0), F[1](1), F[1](2), F[1](3), F[1](4)]$

$$Fv_1 := [1, 0, 0, 0, 0]$$

> $Fv[2] := [F[2](0), F[2](1), F[2](2), F[2](3), F[2](4)]$

$$Fv_2 := [0., 0.5333333333, 0.4666666667, 0., 0.]$$

> $F[3] :=$ **proc**(j)
return $r(s[3], j) \cdot (F[2](0) \cdot \mathrm{p}(0, \mathrm{j}) + F[2](1) \cdot \mathrm{p}(1, \mathrm{j}) + F[2](2) \cdot \mathrm{p}(2, \mathrm{j}) + F[2](3) \cdot \mathrm{p}(3, \mathrm{j}) + F[2](4) \cdot \mathrm{p}(4, \mathrm{j}));$
end proc

$F_3 :=$ **proc**(j)

return $r(s[3],j)*(F[2](0)*p(0,j)+F[2](1)*p(1,j)+F[2](2)*p(2,j)+F[2](3)*p(3,j)+F[2](4)*p(4,j))$

end proc

```
> Fv[3] := [F[3](0), F[3](1), F[3](2), F[3](3), F[3](4)]
```

$$Fv_3 := [0., 0., 0., 0.06285072952, 0.]$$

```
> sz := 30
```

$$sz := 30$$

```
>
for k from 4 to sz do
for j from 0 to 4 do
Fv[k][j + 1] := r(s[k], j)·(Fv[k − 1][1]· p(0, j) + Fv[k − 1][2]
    ·p(1, j) + Fv[k − 1][3]· p(2, j) + Fv[k − 1][4]· p(3, j) + Fv[k
    − 1][5]· p(4, j));
od;
od
```

```
> Fv[3][1]
```

$$0.$$

```
Fv[4][4]
```

$$0.$$

```
Fv[sz][4]
```

$$8.875904812\ 10^{-7}$$

Обоатные переменные:

for j **from** 0 **to** 4 **do** $Bv[sz][j+1] := 1$ **od**

$$1$$
$$1$$
$$1$$
$$1$$
$$1$$

```
for k from 1 to sz − 1 do
t := sz − k;
for j from 0 to 4 do
Bv[t][j + 1] := r(s[t + 1], 0)·Bv[t + 1][1]·p(j, 0) + r(s[t + 1], 1)
    ·Bv[t + 1][2]·p(j, 1) + r(s[t + 1], 2)·Bv[t + 1][3]·p(j, 2) +
r(s[t + 1], 3)·Bv[t + 1][4]·p(j, 3) + r(s[t + 1], 4)·Bv[t + 1][5]
    ·p(j, 4)
od
od
```

$$29$$
$$28$$
$$27$$

26

25

24

23

22

21

20

19

18

17

16

15

14

13

12

11

10

9

8

7

6

5

4

3

2

1

Вероятность появления (испускания) полученного вектора сигналов:

$$PF := \sum_{i=1}^{5} Fv[sz][i]$$

$$8.875904812\,10^{-7}$$

$$Fv[sz][1] + Fv[sz][2] + Fv[sz][3] + Fv[sz][4] + Fv[sz][5]$$

$$8.875904812\,10^{-7}$$

Алгоритм Баума-Велша:

```
for n from 1 to sz do
 U := 0;
for j from 1 to 5 do
U := U + Fv[n][j]·Bv[n][j]
 od ;
 for j from 1 to 5 do
 gf[n][j] := Fv[n][j]·Bv[n][j]/U;
 od
 od
```

```
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
```

```
gf[5][5]
```

```
0.
```

```
Bv[1][2]
```

0.

$Fv[1][2]$

0

$gf[1][2]$

0.

```
for n from 1 to sz − 1 do
 for i from 1 to 5 do
 for j from 1 to 5 do
 U := Fv[n][i]·MVP[i][j]·Bv[n + 1][j]·R[j][s[n + 1] + 1];
 S := 0;
 for i1 from 1 to 5 do
 for j1 from 1 to 5 do
 S := S + Fv[n][i1]·MVP[i1][j1]·Bv[n + 1][j1]·R[j1][s[n + 1]
      + 1];
 od;
 od;
 ksi[n][i][j] := U/S;
 od;
 od;

od
```

$ksi[5][4][1] + ksi[5][4][2] + ksi[5][4][3] + ksi[5][4][4] + ksi[5][4][5]$

0.

Повторная оценка элементов:

Начальное распределение

$\pi 1[1] := gf[1][1]$

1.000000000

$\pi 1[2] := gf[1][2]$

0.

$\pi 1[3] := gf[1][3]$

0.

$\pi 1[4] := gf[1][4]$

0.

$\pi 1[5] := gf[1][5]$

0.

Матрица вероятностей переходов:

```
for i from 1 to 5 do
Vfx[i] := 0;
 for j from 1 to 5 do
 Ufx[i][j] := 0;
 od;
 od;
```

0

0

0

0

0

```
for n from 1 to sz − 1 do
 for i from 1 to 5 do
  Vfx[i] := Vfx[i] + gf[n][i];
 for j from 1 to 5 do
Ufx[i][j] := Ufx[i][j] + ksi[n][i][j];
 od;
 od;
 od;
 for i from 1 to 5 do
 for j from 1 to 5 do
 MVP1[i][j] := Ufx[i][j] / Vfx[i];
 od;
 od;
```

$$A := [[MVP1[1][1], MVP1[1][2], MVP1[1][3], MVP1[1][4], MVP1[1][5]], [MVP1[2][1], MVP1[2][2], MVP1[2][3], MVP1[2][4], MVP1[2][5]], [MVP1[3][1], MVP1[3][2], MVP1[3][3], MVP1[3][4], MVP1[3][5]], [MVP1[4][1], MVP1[4][2], MVP1[4][3], MVP1[4][4], MVP1[4][5]], [MVP1[5][1], MVP1[5][2], MVP1[5][3], MVP1[5][4], MVP1[5][5]]]$$

$$[[0., 0.5065868265, 0.4934131735, 0., 0.], [0.7355458208, 0., 0., 0.2644541792, 0.], [0.6941695314, 0., 0., 0.3058304686, 0.], [0., 0.2687941047, 0.3978725620, 0., 0.3333333333], [0., 0.4276347234, 0.5723652766, 0., 0.]]$$

Алгоритм Витерби:

нахождение цепочки состояний, максимизирующей вероятность того, что модель с заданными параметрами дала заданную цепочку сигналов по искомой цепочке состояний.

Прямой ход:

$$V[1] := [pi0[1]\cdot r(s[1], 0), pi0[2]\cdot r(s[1], 1), pi0[3]\cdot r(s[1], 2), pi0[4]\cdot r(s[1], 3), pi0[5]\cdot r(s[1], 4)]$$

$$[1, 0, 0, 0, 0]$$

$$Ind[1] := 1;$$

1

```
for j from 1 to 5 do
 if (V[1][j] > V[1][Ind[1]])
 then Ind[1] := j;
 end if;
 od
```

$Ind[1]$

1

```
for n from 2 to sz do
 for j from 1 to 5 do
 cf := p(0,j − 1)·V[n − 1][1];
  imax := 1;
 for i from 1 to 5 do
 if (p(i − 1,j − 1)·V[n − 1][i] > cf)
 then
 cf := p(i − 1,j − 1)·V[n − 1][i];
 imax := i;
 end if;
 V[n][j] := r(s[n],j − 1)·cf;
 od;
 od;
Ind[n] := 1;
 for j from 1 to 5 do
 if (V[n][j] > V[n][Ind[n]])
 then Ind[n] := j;
 end if;
 od;
 od
```

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

$Ind[7]$

4

for n **from** 1 **to** sz **do** $k := Ind[n]$; **od**

1

2

4

3

1

2

4

5

3

1

2

1

2

1

2

1

2

1

2

4

3

1

2

1

2

1

2

1

2

4

Приложение И.

Копии свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2019614657

Программа анализа надёжности и эффективности систем с резервом времени

Правообладатель: ***Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Севастопольский государственный университет» (RU)***

Авторы: ***Обжерин Юрий Евгеньевич (RU), Никитин Михаил Михайлович (RU), Сидоров Станислав Михайлович (RU)***

Заявка № **2018662300**

Дата поступления **06 ноября 2018 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***10 апреля 2019 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2019619864

Программа расчета показателей надежности многокомпонентной системы

Правообладатель: ***Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Севастопольский государственный университет» (RU)***

Авторы: ***Обжерин Юрий Евгеньевич (RU), Никитин Михаил Михайлович (RU), Сидоров Станислав Михайлович (RU)***

Заявка № **2019618888**

Дата поступления **18 июля 2019 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***25 июля 2019 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

Приложение К.

Копия акта использования результатов диссертационной работы в учебном процессе

УТВЕРДЖАЮ

Проректор по образовательной деятельности

ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

_____ Н.О. Минькова

«___» _____ 2020 г.

АКТ

об использовании в учебном процессе результатов диссертационной работы Сидорова Станислава Михайловича «Полумарковские и скрытые марковские модели систем с резервом времени», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук

Настоящим подтверждается, что результаты диссертационной работы Сидорова Станислава Михайловича, работающего старшим преподавателем в ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет» кафедра «Высшая математика», а именно математические модели и характеристики надежности и эффективности систем с резервом времени, были использованы в учебном процессе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Севастопольский государственный университет» на базовой кафедре «Интеллектуальные сети электроснабжения» для проведения лекций и практических занятий студентов по направлению подготовки 13.04.02 – Электроэнергетика и электротехника (Интеллектуальные сети электроснабжения), уровень магистратура, по дисциплине «Надежность энергоснабжения».

Директор института национальной технологической инициативы С.Ю. Дудников

Заведующий кафедрой «Интеллектуальные сети электроснабжения», к.т.н., доцент С.Ю. Петрова